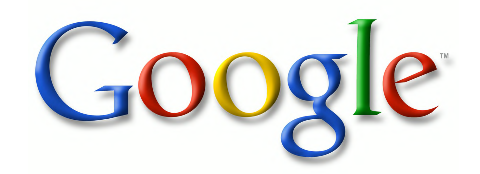




GRUNDZÜGE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

VON

DR. OTTO STOLZ,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU INNSBRUCK.

DRITTER THEIL:

DIE LEHRE VON DEN DOPPELINTEGRALEN.

EINE ERGÄNZUNG ZUM ERSTEN THEILE DES WERKES.

MIT 41 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1899.

Vorwort.

Das eigentliche Doppelintegral ist ebensowenig ein geometrischer Begriff, wie das einfache bestimmte Integral im eigentlichen Sinne, sondern lässt sich in ähnlicher Weise analytisch erklären, wie das letztere. Hieran schliesst sich das uneigentliche Doppelintegral als Grenzwerth eines eigentlichen über ein veränderliches Gebiet, das einem gegebenen Gebiete sich unbegrenzt und zwar auf jede beliebige Weise nähern darf.

Die analytische Darstellung der Lehre von den Doppelintegralen hat mehr Schwierigkeiten gemacht, als die der Lehre von den einfachen Integralen. Sie wurde in der Hauptsache abgeschlossen durch eine 1892 erschienene Arbeit von de la Vallée-Poussin, welche über die Verwandlung des uneigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral auf wirklich befriedigende Weise handelt.

Die neueren Arbeiten über die Doppelintegrale im Zusammenhange vorzuführen, ist der Zweck dieses dritten Theiles der „Grundzüge". Wo die einzelnen Sätze und ihre Beweise in der Form, in welcher sie hier erscheinen, meines Wissens zuerst vorkommen, ist überall genau angegeben.

Der dritte Theil schliesst sich unmittelbar an den ersten an, so dass er mit demselben ein Ganzes bildet. Es sind nämlich auch im dritten Theile nur reelle Werthe der Integrationsveränderlichen und, abgesehen von gelegentlichen Bemerkungen, auch nur reelle Functionen derselben berücksichtigt.

Der Inhalt des dritten Theiles zerfällt in vier Abschnitte, welche im Anschlusse an die Zählung der Abschnitte in den beiden vorgehenden Theilen als der XVI. — XIX. bezeichnet sind. Der XVI. Abschnitt handelt von den zweimaligen bestimmten Integralen der Functionen zweier Veränderlichen zwischen constanten Grenzen; der XVII. vom oberen und unteren Doppelintegral einer endlichen Function, welche im Falle, dass sie einander gleich sind, ihr eigentliches Doppelintegral bilden; der XVIII. von den uneigentlichen Doppelintegralen und der XIX. von den wichtigsten geometrischen Anwendungen der Doppelintegrale. Hierzu tritt als Nachtrag zum ersten Theile eine weitere Ausführung der Lehre vom eigentlichen und vom uneigentlichen einfachen bestimmten Integral. Denn es hat sich gezeigt, dass die oben erwähnte Verwandlung der uneigentlichen Doppelintegrale selbst für die einfachste Art derselben nur mit Hilfe der allgemeinen Begriffe jener einfachen Integrale eine sachlich angemessene Begründung erlangen kann.

Der dritte Theil enthält mehr als 70, zumeist vollständig durchgeführte Beispiele und Aufgaben, welche ein ausreichendes Uebungsmaterial für die Lehre von den Doppelintegralen bilden dürften.

Auch um diesen Band hat sich Herr College V. Dantscher v. Kollesberg durch sorgfältiges Durchsehen der Revisionsbogen verdient gemacht, wofür ich ihm zum wärmsten Danke verpflichtet bin.

Lans bei Innsbruck, am 23. Juli 1899.

O. Stolz.

Inhaltsverzeichniss.

XVI. Abschnitt. Zweimalige bestimmte Integrale von Functionen zweier Veränderlichen zwischen constanten Grenzen.

XVII. Abschnitt. Das eigentliche Doppelintegral.

Doppelintegrale über ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet.

XIX. Abschnitt. Geometrische Anwendungen der Doppelintegrale.

Die Complanation der krummen Flächen.

XVI. Abschnitt.

Zweimalige bestimmte Integrale von Functionen zweier Veränderlichen zwischen constanten Grenzen.

1. Lässt sich die reelle oder complexe Function $f(x, y)$ der reellen Veränderlichen x, y, welche wenigstens für jedes System von Werthen x, y, die den Bedingungen

$$a < x < a' \quad b < y < b'$$

genügen, eindeutig definirt ist, bei constantem, beliebig zwischen b und b' angenommenen y nach x über das Intervall (a, a') im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne integriren und die so erhaltene Function von y über das Intervall (b, b'), so gelangt man zum Ausdrucke

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

welcher nach P. du Bois-Reymond das zweimalige bestimmte Integral der Function $f(x, y)$ und zwar nach x zwischen den constanten Grenzen a, a' und nach y zwischen den Grenzen b und b' heissen mag.[1] A. Pringsheim bezeichnet den Ausdruck (1) als iterirtes Integral.[2]

Eine ähnliche Bedeutung hat das Zeichen

$$\int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x, y)\, dy. \tag{2}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass $f(x, y)$ bei jedem x zwischen a und a' sich nach y über das Intervall (b, b') und die auf solche Art zu Stande gebrachte Function von x sich über das Intervall (a, a') integriren lasse. Es handelt sich nun darum, die Beziehung zwischen den Ausdrücken (1) und (2) zu untersuchen.

---

1) Vgl. P. du Bois-Reymond, Journal f. Math. 94. Bd. S. 275. Dem Ausdrucke (1) lässt sich auch im Falle, dass die Grenzen a und a' von y abhängen, ein zweiter, worin die Reihenfolge der beiden Integrationen umgekehrt ist, an die Seite stellen [s. XVII. 8. Formel (20)].

2) Sitz. Ber. der Münchner Acad. 1898 S. 59.

1. Satz.[1] „Sind die Intervalle (a, a') und (b, b') endlich und ist die für jedes System von Werthen x, y, welche den Bedingungen

$$a \leqq x \leqq a' \quad b \leqq y \leqq b' \tag{3}$$

genügen, eindeutig definirte, reelle oder complexe Function $f(x, y)$ auch bei jedem solchen Werthsystem x, y stetig, so besteht die Gleichung

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x, y)\, dy. \tag{4}$$

Es lässt sich also die Reihenfolge der beiden Integrationen umkehren, ohne dass der Werth des zweimaligen Integrals sich ändert. Oder: Um die Function

$$\int_a^{a'} f(x, y)\, dx$$

nach y von $y = b$ bis $y = b'$ zu integriren, integrirt man die Function unter dem $\int$ zwischen diesen Grenzen.“ Der Satz entspringt unmittelbar aus dem nachstehenden

2. Satz. „Die Function

$$F(x, y) = \int_b^y dy \int_a^x f(x, y)\, dx, \tag{5}$$

worin die obere Grenze x im innern Integral einen bestimmten Werth des Intervalles (a, a'), die obere Grenze y im äussern Integral einen bestimmten Werth des Intervalles (b, b') bedeutet[2], hat für jedes Werthsystem (3) endliche partielle Differentialquotienten erster Ordnung nach x und nach y $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$. Dafür hat ferner $\frac{\partial F}{\partial y}$ einen Differentialquotienten nach x und $\frac{\partial F}{\partial x}$ einen nach y und zwar ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f(x, y) \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = f(x, y).“ \tag{7}$$

---

1) In XVII. 9 werden wir einen andern Beweis des 1. Satzes und eine Verallgemeinerung desselben kennen lernen.

2) Der Einfachheit wegen wählt man bisweilen für die Integrationsveränderliche und für eine der Grenzen des Integrals, wenn diese als veränderlich angesehen wird, das nämliche Zeichen.

Beweis. Da $f(x, y)$ für jedes Werthsystem (3) stetig ist, so ist

$$\int_a^x f(x, y)\, dx \qquad (a \leqq x \leqq a')$$

eine stetige Function von y, mag y was immer für einen Werth im Intervalle (b, b') bedeuten (I. T. S. 443 und II. T. S. 167), lässt sich also über das Intervall (b, y) integriren.

Dann ist nach dem 9. Satze in X. 6 bezw. dem 8. in XIV. 2

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f(x, y)\, dx \text{ und } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f(x, y).$$

Man hat ferner nach dem Satze am Anfange von X. 23 (der sich ohne Weiteres auf eine complexe Function von x und y übertragen lässt)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y dy \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f(x, y)\, dx = \int_b^y f(x, y)\, dy.$$

Hieraus ergiebt sich, wieder mit Hilfe der oben erwähnten Sätze, die Formel

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = f(x, y).$$

Dieses vorausgesetzt, lässt sich jeder der Ausdrücke (1) und (2) durch zweimalige Anwendung des Fundamentalsatzes der Integralrechnung (X. 4) berechnen. Wir finden zunächst nach (6)

$$\int_a^{a'} f(x, y)\, dx = \Big|_{x=a}^{x=a'} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F(a', y)}{\partial y} - \frac{\partial F(a, y)}{\partial y},$$

somit

$$\begin{aligned}\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx &= \int_b^{b'} \frac{\partial F(a', y)}{\partial y} dy - \int_b^{b'} \frac{\partial F(a, y)}{\partial y} dy \\ &= \Big|_{y=b}^{y=b'} F(a', y) - \Big|_{y=b}^{y=b'} F(a, y) \\ &= F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b).\end{aligned}$$

Ebenso hat man nach (7)

$$\int_b^{b'} f(x, y)\, dy = \Big|_{y=b}^{y=b'} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F(x, b')}{\partial x} - \frac{\partial F(x, b)}{\partial x},$$

also

$$\int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x,y)\,dy = \int_a^{a'} \frac{\partial F(x,b')}{\partial x}\,dx - \int_a^{a'} \frac{\partial F(x,b)}{\partial x}\,dx$$
$$= \Big|_{x=a}^{x=a'} F(x,b') - \Big|_{x=a}^{x=a'} F(x,b)$$
$$= F(a',b') - F(a,b') - F(a',b) + F(a,b).$$

Es besteht somit in der That die Gleichung (4).

Der 1. Satz lässt sich sofort in folgender Art verallgemeinern.

3. Satz. „Die Gleichung (4) besteht auch dann, wenn die Function $f(x, y)$ blos für alle Systeme von Werthen $x\,y$, welche den Bedingungen

$$a < x < a' \quad b < y < b'$$

genügen, eindeutig definirt, stetig und endlich ist (d. h. $|f(x, y)|$ für alle x, y unter einer positiven Zahl γ liegt)."

Beweis. Lassen wir zunächst $f(x, y)$ noch stetig sein bei allen Werthsystemen (3) ausser denen, wozu $y = b'$ gehört. Dann haben wir nach dem 1. Satze, woferne nur $y < b'$ ist, sicher

$$\left.\begin{aligned} \int_b^y dy \int_a^{a'} f(x,y)\,dx &= \int_a^{a'} dx \int_b^y f(x,y)\,dy \\ &= \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x,y)\,dy \\ &- \int_a^{a'} dx \int_y^{b'} f(x,y)\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Der zweite Theil ist seinem Betrage nach kleiner als

$$\int_a^{a'} dx\,\gamma\,(b' - y) = (a' - a)\,\gamma\,(b' - y),$$

hat also bei $\lim y = b' - 0$ den Grenzwerth Null. Demnach ergiebt sich aus (8) durch den Grenzübergang $\lim y = b' - 0$ neuerdings die Formel (4). — Durch Theilung des durch die Beziehungen (3) erklärten Gebietes, welches geometrisch durch das zwischen den Abscissen a, a' und den Ordinaten b, b' liegende Rechteck $ABA'B'$ (Fig. 1 auf S. 12) dargestellt wird, mittelst einer Parallelen zur x-Axe und einer zur y-Axe in vier Gebiete und entsprechende Anwendung der soeben

vorgeführten Schlussweise auf jedes von ihnen, gelangt man dann zum 3. Satze.

Der 3. Satz lässt sich unmittelbar ausdehnen auf den Fall, dass die Function $f(x, y)$, wenn sie nur für alle Innenpunkte des Rechteckes $ABA'B'$ endlich ist, die Stetigkeit verliert in den Punkten einer endlichen Anzahl von Linien, welche zur einen oder der anderen Coordinaten-Axe parallel sind. Solche Linien zerschneiden nämlich das Rechteck $ABA'B'$ in eine endliche Zahl von Rechtecke, deren Seiten den Axen parallel sind. Und da der vorstehende Satz in jedem derselben für die Function $f(x, y)$ gilt, so gilt er, wie sich durch Addition der für die einzelnen Theilrechtecke erhaltenen Formeln ergiebt, auch für das ganze Rechteck.

In ähnlicher Art, wie aus dem 1. Satze der 3. gewonnen wurde, lässt sich die soeben dargelegte Erweiterung des letzteren dahin ausdehnen, dass die Parallelen zu einer jeden Axe, auf welchen die im Rechtecke $ABA'B'$ endliche Function $f(x, y)$ unstetig ist, je ein unendliches System erster Gattung bilden.

1*. Anwendung. Der vorstehende 1. Satz führt zu einer eleganten Ableitung des Integrals $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$ (vgl. Ch. Méray Leçons nouvelles etc. III. T. 1897 S. 38). — Wir setzen

$$\int_0^x e^{-u^2}\,du = f(x) \tag{9}$$

und nehmen dazu $f(0)=0$. Dies Integral geht durch die Substitution $u=xy$ über in

$$f(x) = x\int_0^1 e^{-x^2y^2}\,dy.$$

Multipliciren wir diese Gleichung gliedweise mit der folgenden, welche aus (9) nach I. S. 375 hervorgeht,

$$f'(x) = e^{-x^2},$$

so ergiebt sich

$$f(x)\,f'(x) = xe^{-x^2}\int e^{-x^2y^2}\,dy.$$

Integriren wir beiderseits nach x von $x=0$ bis $x=v$, so finden wir

$$\frac{1}{2}f(v)^2 = \int_0^v xe^{-x^2}\,dx\int_0^1 e^{-x^2y^2}\,dy. \tag{10}$$

Da die Function

$$xe^{-(1+y^2)x^2}$$

im Rechtecke: $0 \leqq x \leqq v \quad 0 \leqq y \leqq 1$ durchweg stetig ist, so können die beiden Integrationen auf der rechten Seite von (10) ohne Aenderung des Werthes derselben vertauscht werden. Wir erhalten somit

$$\left.\begin{aligned} f(v)^2 &= \int_0^1 dy \int_0^v 2e^{-(1+y^2)x^2} x\,dx = \int_0^1 dy \Big|_{x=0}^{x=v} -\frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)v^2}}{1+y^2}\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Bei $\lim v = +\infty$ hat der Subtrahend rechts, da er kleiner als

$$\int_0^1 \frac{e^{-v^2}dy}{1+y^2} = e^{-v^2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4} e^{-v^2}$$

ist, den Grenzwerth Null. Demnach folgt aus (11), dass

$$\lim_{v=+\infty} f(v)^2 = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{also} \qquad \lim_{v=+\infty} f(v) = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist.

2. Wenn die Function $f(x, y)$ in dem zweimaligen Integral (1) für die Punkte des von den beiden Integrationsintervallen bestimmten Rechteckes nicht endlich oder von diesen mindestens eines unendlich ist, so kann sich bei Umkehrung der Reihenfolge der beiden Integrationen der Werth des Integrals ändern. Diese Bemerkung haben zuerst Cauchy und Gauss gemacht.[1])

a) Der Erstere bringt folgendes einfache Beispiel bei.[2]) Nach der Formel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2+x^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} \quad (1)$$

hat man

$$\left.\begin{aligned} J &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 dy \Big|_{x=0}^{x=1} \frac{x}{y^2+x^2} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \Big|_0^1 \operatorname{arc\,tan} y = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Vertauscht man in der Formel (1) x und y, so ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \quad (2^*)$$

---

1) Cauchy in dem am 22. August 1814 im Institut de France gelesenen Mémoire sur la théorie des intégrales definies (vgl. Oeuvres I. ser. T. 1), Gauss in der am 30. Jänner 1816 eingereichten Abhandlung: Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia (vgl. Werke III. S. 62).

2) Oeuvres a. a. O. S. 394.

Demnach ist

$$\left.\begin{aligned} K=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dy &= \int_0^1 dx\,\Bigg|_{y=0}^{y=1}\frac{-y}{x^2+y^2} \\ &= -\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Ausdrücke (2) und (3) haben somit entgegengesetzte Werthe, was man noch leichter erkennt, indem man im Ausdrucke (2) x und y mit einander vertauscht, wodurch er natürlich nicht geändert wird. Die Function (1) ist in dem Quadrate mit der Seite $0E=1$ auf der positiven x-Axe und der Seite $0F=1$ auf der positiven y-Axe überall stetig mit alleiniger Ausnahme des Punktes $x=0$ $y=0$. Dort ist sie unbestimmt und hat dabei in jeder noch so kleinen Umgebung desselben die obere Grenze $+\infty$ und die untere $-\infty$. In der That geht sie durch die Substitution $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$ in $-\cos 2\theta : r^2$ über, hat also auf jedem nicht in die Halbirungslinien der Winkel der Coordinatenaxen fallenden Halbstrahl bei $\lim r=+0$ den Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$. Auf ähnliche Art gelangt man zu den Formeln

$$\int_1^\infty dy\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_1^\infty dx\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dy = \frac{\pi}{4}. \quad (4)$$

b) Dass das innere Integral in (2)

$$\Phi(y)=\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{y^2+1}$$

bei der Annahme $y=0$ in das sinnlose Integral $-\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ übergeht, hat bei dem Umstande, dass $\Phi(y)$ bei $\lim y=+0$ den endlichen Grenzwerth 1 hat, gar keine Bedeutung (vgl. I. S. 359). In der That giebt es zweimalige Integrale, die bei der Umkehrung der Reihenfolge der beiden Integrationen ihren Werth ändern, ohne dass die soeben erwähnte Erscheinung auftritt. P. du Bois-Reymond hat das nachstehende Beispiel von dieser Beschaffenheit angegeben. Ist

$$g(u)=\frac{\lambda u^\lambda}{1+u^{2\lambda}} \quad (\lambda>1),$$

so hat man

$$g'(u)=\frac{\lambda^2 u^{\lambda-1}(1-u^{2\lambda})}{(1+u^{2\lambda})^2}.$$

Nun ist für alle Werthe von y: $0 < y \leqq b$

$$\Phi(y) = \int_0^\infty g'_u(xy)\,dx = \lim_{x=+\infty} \frac{g(xy)}{y} - \left[\frac{g(xy)}{y}\right]_{x=0} = 0;$$

aber auch für $y = 0$ selbst, da $g'(0) =$ ist. Hier ist somit $\Phi(y)$ stetig für jeden Werth von y: $0 \leqq y \leqq b$. Gleichwohl hat man neben

$$\int_0^b dy \int_0^\infty g'(xy)\,dx = 0$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^b g'(xy)\,dy = \int_0^\infty dx\, \frac{g(xb)}{x} = \int_0^\infty \frac{g(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist nämlich

$$\frac{g(u)}{u} = \frac{\lambda u^{\lambda-1}}{1+u^{2\lambda}} = D_u \operatorname{arc\,tan}(u^\lambda).$$

c) Verwickelter sind die von Gauss a. a. O. gegebenen Integralausdrücke. Dennoch scheint es angebracht, sie hier vorzuführen, weil sie zu einem Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra d. i. des Satzes, dass jede ganze Function n^{ten} Grades von x

$$f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n \tag{5}$$

mindestens für einen reellen oder complexen Werth von x verschwindet, dienen. Der Kürze wegen nehmen wir die Coefficienten $c_0 c_1 \dots c_n$ reell und den letzten c_n von Null verschieden an. Setzen wir

$$x = \varrho\,\{\cos\varphi + i\sin\varphi\} = \varrho e^{\varphi i}$$

$$f(\varrho e^{\varphi i}) = T + Ui,$$

unter TU die Coordinaten von $f(\varrho e^{\varphi i})$ verstanden, so ist

$$\left.\begin{aligned} T &= c_0\varrho^n \cos n\varphi + c_1\varrho^{n-1}\cos(n-1)\varphi + \cdots \\ &\qquad + c_{n-1}\varrho\cos\varphi + c_n \\ U &= c_0\varrho^n \sin n\varphi + c_1\varrho^{n-1}\sin(n-1)\varphi + \cdots \\ &\qquad + c_{n-1}\varrho\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Es sei ferner

$$V = \operatorname{arc\,tan}(U : T).$$

Dann haben wir, falls T nicht verschwindet,

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \left(T\frac{\partial U}{\partial \varrho} - U\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) : (T^2 + U^2). \tag{7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \left(T\frac{\partial U}{\partial \varphi} - U\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) : (T^2 + U^2), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi\, \partial \varrho} = \frac{M}{(T^2 + U^2)^2}, \tag{9}$$

worin M eine ganze Function von ϱ und den Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ bezeichnet.

Da die Gleichung $f(x) = 0$ keinesfalls mehr als n Wurzeln besitzt, so können wir eine positive Zahl R so annehmen, dass, wenn $|x| \geqq R$ ist, $|f(x)|$ stets positiv ist. Für die nämlichen Werthe von x besteht die Entwickelung von $f'(x) : f(x)$ nach fallenden Potenzen von x

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots, \tag{10}$$

deren Coefficienten ganze Functionen von $\frac{c_1}{c_0} \cdots \frac{c_n}{c_0}$ sind (vgl. II. T. S. 253 und 275).

Angenommen nun, die Gleichung $f(x) = 0$ habe gar keine Wurzel, so würde $T^2 + U^2$ für kein System von Werthen $\varrho\,\varphi$, welche den Bedingungen

$$0 \leqq \varrho \leqq R \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \tag{11}$$

genügen, verschwinden. Dann wäre die Function

$$M : (T^2 + U^2)^2$$

für jedes solche Werthsystem $\varrho\,\varphi$ stetig und man hätte

$$\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{M}{(T^2 + U^2)^2}\, d\varphi = \int_0^R d\varrho \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \int_0^R 0 \cdot d\varrho = 0, \tag{12}$$

da $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ den nämlichen Werth hat. Den nämlichen Werth müsste nach Nr. 1 das zweimalige Integral

$$K = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{M}{(T^2 + U^2)^2}\, d\varrho \tag{13}$$

haben. Allein dies erweist sich als falsch. Man hätte nämlich bei jedem Werthe von φ

$$\int_0^R \frac{M}{(T^2 + U^2)^2}\, d\varrho = \left|\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\varrho=0}^{\varrho=R}. \tag{13*}$$

Für $\varrho = 0$ verschwindet sowohl U als auch $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, somit, da $T^2 + U^2 = c_n^2$ ist, nach (8) auch $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$. Also müsste

$$K = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{\varrho = R} d\varphi \tag{14}$$

sein. Es ist aber $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ nach (8) die imaginäre Coordinate des Quotienten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} i\right) : (T + Ui) = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varrho e^{\varphi i}) : f(\varrho e^{\varphi i}) = f'_x(\varrho e^{\varphi i}) i \varrho e^{\varphi i} : f(\varrho e^{\varphi i}),$$

also die reelle Coordinate von $f'_x(\varrho e^{\varphi i}) \varrho e^{\varphi i} : f(\varrho e^{\varphi i})$.

Setzt man $\varrho = R$, so hat man nach (10)

$$\frac{f_x'(Re^{\varphi i})}{f(Re^{\varphi i})} Re^{\varphi i} = n + \frac{C_1}{R} e^{-\varphi i} + \frac{C_2}{R^2} e^{-2\varphi i} + \cdots \tag{15}$$

Die Potenzreihe (10) convergirt gleichmässig für alle Werthe von x, deren Betrag grösser als R ist[1]), somit die Reihe aus den reellen Theilen der Glieder auf der rechten Seite von (15)

$$n + \frac{C_1}{R} \cos \varphi + \frac{C_2}{R^2} \cos 2\varphi + \cdots = \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{\varrho = R}$$

gleichmässig für alle Werthe von φ: $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Man könnte demnach das Integral (14) durch gliedweise Integration der letzten Reihe finden, so dass sich

$$K = n \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{C_1}{R} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi + \cdots = 2n\pi \tag{16}$$

ergeben würde.

Die gemachte Voraussetzung ist somit zu verwerfen. Es muss also mindestens ein Werthsystem $\varrho \varphi$ geben, wofür $T^2 + U^2 = 0$ d. i. $T = 0$ $U = 0$ ist, somit mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Nun haben wir doch wohl noch zu bemerken, dass die Formeln (12) und (16) wirklich richtig sind. Dies beruht darauf, dass es nur eine endliche Anzahl von Systemen von Werthen $\varrho \varphi$, welche den Bedingungen (11) genügen, giebt, wofür $T = 0$ $U = 0$ ist. Es gilt also die Formel (13*) für alle Werthe von φ im Intervalle $(0, 2\pi)$, abgerechnet eine endliche Anzahl von ihnen. Und da es bei der Integration nach φ auf die letzteren nicht ankommt, so gelangen wir auch jetzt von der Formel (13*) zu (16). Aehnliches ist auch von (12) zu sagen.

1) Vgl. Arithmetik II. S. 156.

Sind in $f(x)$ $c_n = c_{n-1} = \ldots = c_{m+1} = 0$ und erst c_m von 0 verschieden, so ist $K = 2m\pi$ $(m < n)$. Diese und die Formeln (12) und (16) gelten auch im Falle, dass die Coefficienten $c_0\ c_1 \ldots c_n$ complex sind. Um den Fundamentalsatz der Algebra nach dem obigen Verfahren auch für diesen Fall zu beweisen, muss man TU die Coordinaten der complexen Zahl $f\{\varrho e^{\varphi i}\}$, nicht etwa die Ausdrücke (6), sein lassen.

d) Endlich sei noch erwähnt das zweimalige Integral

$$\int_0^\infty dy \int_0^a \cos yx\, dx = \int_0^\infty dy \left| \frac{\sin yx}{y} \right|_{x=0}^{x=a} = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{y}\, dy = \frac{\pi}{2},$$

wobei wir uns $a > 0$ denken (vgl. I. T. S. 456). Vertauschen wir hier die beiden Integrationen, so erhalten wir einen Ausdruck ohne Sinn, weil schon das Integral

$$\int_0^\infty \cos xy\, dy$$

nicht vorhanden ist (I. T. S. 456).

Auf derartige Vorkommnisse haben zuerst aufmerksam gemacht: J. Thomae Schlömilch Zeitschr. 23. B. S. 67, P. du Bois-Reymond Journ. f. Math. 94. B. S. 288. Ungewiss ist noch, ob ein solches auch eintreten kann, wenn die Function unter den $\int$ für die innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Werthsysteme x, y ihr Zeichen nicht wechselt und dabei stetig ist. (Vgl. XVIII. 14* und 16 Beispiel 2.)

3. Bedingungen, unter welchen die Vertauschung der beiden Integrationen in einem uneigentlichen zweimaligen Integral ohne Aenderung seines Werthes zulässig ist. [Integration unter dem Integralzeichen.][1])

Uns auf die Behandlung der wichtigsten Fälle beschränkend, nehmen wir zunächst die vier Grenzen $aa'\ bb'$ endlich an. Die Parallelen zur y-Axe $x = a$ $x = a'$ einer-, und die zur x-Axe $y = b$ $y = b'$ andererseits bilden in der xy-Ebene ein Rechteck mit den Ecken $A \equiv (a, b)$ $A' \equiv (a'\ b')$ $B \equiv (a', b)$ $B' \equiv (a, b')$. (Fig. 1.)

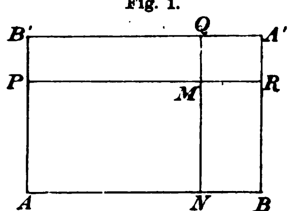
---

1) Den 1. Satz in Nr. 4 hat der Verfasser zuerst 1879 und später im 26. B. d. Math. Ann. S. 89 veröffentlicht. Die Sätze in Nr. 3—5 finden sich in ähnlicher Form in der Abhandlung von de la Vallée-Poussin im Jhrg. 1892 des Journal de Math. (Nr. 63—77) und im Cours de Analyse von C. Jordan II éd. (II. Nr. 68—72). Der 3. Satz in Nr. 3 und 4 und der 2. in Nr. 5 rühren von ersterem her (a. a. O. Nr. 65, 71, 77).

1. Satz. „Wir machen zunächst die folgenden Voraussetzungen: 1) Schneiden wir auf AB ein Stück $NB = \xi$ von beliebiger Kleinheit ab und ziehen durch N die Parallele zur y-Axe, so erhalten wir das Rechteck $ANQB'$, in dessen jedem Punkte (den Rand eingeschlossen) die reelle oder complexe Function $f(x, y)$ in Bezug auf die Veränderlichen x und y stetig sein soll."

„2) $f(x, y)$ ist für die Punkte x, y im Rechtecke $NBA'Q$ nicht endlich. Dabei soll, mag y was immer für ein Werth im Intervalle (b, b') mit Ausschluss von $y = b'$ sein, jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so entsprechen, dass falls nur $0 < \xi' < \xi < \delta$ ist

Fig. 1.



$$\left| \int_{a'-\xi}^{a'-\xi'} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon\omega(y) \quad (1)$$

ist, worin $\omega(y)$ eine für jedes solche y eindeutig definirte positive Function von y bedeutet, welche in jedem Intervalle $(b, b' - \eta)$ $(\eta > 0)$ endlich ist und über das Intervall (b, b') ein eigentliches oder uneigentliches Integral zulässt. Dann existirt natürlich (vgl. S. 384 d. I. T.) für jedes y:

$$b \leqq y < b' \quad \int_a^{a'} f(x, y)\, dx. \quad (2)$$

Ebenso existirt auch $\int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx$ und zwar finden wir dafür aus (1) bei $\lim \xi' = +0$, dass neben

$$0 < \xi < \delta \quad \left| \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx \right| \leqq \varepsilon\omega(y) \quad (2^*)$$

ist. Wenn $\omega(y)$ für alle diese y eine endliche obere Grenze L hat, so darf man in (1) $\omega(y)$ durch L ersetzen. Da auch εL jede positive Zahl sein kann, so fällt dann die Forderung damit zusammen, dass das Integral $\int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx$ bei $\lim \xi = +0$ gleichmässig für alle Werthe von y im Intervalle (b, b') mit Ausschluss von $y = b'$ zur Null convergirt. Dafür sagt man kurz: das Integral $\int_a^{a'} f(x, y)\, dx$ convergirt gleichmässig für die ebengenannten Werthe von y."

(S) „Unter diesen Umständen existiren die zweimaligen Integrale

$$J = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx \quad K = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x, y)\, dy$$

und zwar sind sie einander gleich."

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass das Integral (2) eine stetige Function von y für jedes y, $b \leqq y < b'$, ist. Um dies einzusehen, bilden wir

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^{a'} f(x, y+\eta)\, dx - \int_a^{a'} f(x, y)\, dy \\ = &\int_a^{a'-\xi} [f(x, y+\eta) - f(x, y)]\, dx + \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y+\eta)\, dx \\ &- \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx. \end{aligned}\right\}(3)$$

Lassen wir ξ einen festen Werth zwischen 0 und δ sein, so ist nach (2*) das dritte Glied rechts seinem Betrage nach nicht grösser als $\varepsilon\omega(y)$, folglich auch nicht grösser als $\varepsilon L'$, wenn L' die obere Grenze von $\omega(y_1)$ im Intervalle (b, c) von y_1 bedeutet, wo c beliebig zwischen y und b' genommen ist. Desgleichen ist, wenn wir uns von vornherein η so klein denken, dass $y + \eta \leqq c$ ist, das zweite Glied rechts in (3) seinem Betrage nach nicht grösser als $\varepsilon L'$. Da das Integral $\int_a^{a'-\xi} f(x, y)\, dx$ eine stetige Function von y bei jedem Werthe von y im Intervalle (b, b') ist (S. 443 d. I. T. und S. 167 d. II. T.), so lässt sich dem $\varepsilon > 0$ ein δ_ξ so zuordnen, dass das erste Glied auf der rechten Seite von (3) dem Betrage nach kleiner als ε ist, wenn nur $0 < \eta < \delta_\xi$ ist. Demnach finden wir, dass unter der nämlichen Voraussetzung bezüglich η

$$\left| \int_a^{a'} f(x, y+\eta)\, dx - \int_a^{a'} f(x, y)\, dx \right| < (1 + 2L')\varepsilon$$

ist. Da $(1 + 2L')\varepsilon$ jede positive Zahl sein kann, so ist die Stetigkeit des Integrals (2) nach y erwiesen. — Um dann

die Existenz des zweimaligen Integrals J festzustellen, gehen wir davon aus, dass für $0 < \eta' < \eta$ und $\xi > 0$

$$\left.\begin{aligned}\int_{b'-\eta}^{b'-\eta'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx = \int_{b'-\eta}^{b'-\eta'} dy \int_a^{a'-\xi} f(x, y)\, dx \\ + \int_{b'-\eta}^{b'-\eta'} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx\end{aligned}\right\} \quad (3^*)$$

ist. Der zweite Theil rechts ist, falls $\xi < \delta$ ist, nach (1) dem Betrage nach nicht grösser als

$$\varepsilon \int_{b'-\eta}^{b'-\eta'} \omega(y)\, dy,$$

folglich, da man nach Voraussetzung zu $\varepsilon' : \varepsilon$ eine Zahl $\varkappa < 0$ so bestimmen kann, dass wenn nur $0 < \eta' < \eta < \varkappa$ ist,

$$\int_{b'-\eta}^{b'-\eta'} \omega(y)\, dy < \varepsilon' : \varepsilon$$

ist, unter der nämlichen Annahme über η und η' kleiner als ε'. Lassen wir nun in (3*) ξ einen bestimmten Werth kleiner als δ sein und bedenken, dass $f(x, y)$ in allen Punkten des Rechtecks $ANQB'$ stetig in Bezug auf x und y, somit nach S. 3 auch

$$\int_b^y dy \int_a^{a'-\xi} f(x, y)\, dx$$

bei $y = b'$ stetig ist, so können wir dem $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\lambda(\xi) > 0$ so zuordnen, dass der erste Theil rechts in (3*) seinem Betrage nach kleiner als ε' ausfällt, wenn nur $0 < \eta' < \eta < \lambda(\xi)$ ist. Verstehen wir nun unter λ die kleinere der Zahlen $\varkappa$ und $\lambda(\xi)$, so ist demnach, falls nun $0 < \eta' < \eta < \lambda$ ist,

$$\left| \int_{b'-\eta}^{b'-\eta'} \int_a^{a'} f(x, y)\, dx \right| < 2\varepsilon'.$$

Dies besagt, dass das Integral J vorhanden ist.

Nun hat man nach dem 1. Satze auf S. 2

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{a'-\xi} f(x, y)\, dx = \int_a^{a'-} dx \int_b^{b'} f\; x, y)\, dy. \quad (4)$$

Setzt man auf der linken Seite von (4)

$$\int_a^{a'-\xi} f(x,y)\,dx = \int_a^{a'} f(x,y)\,dx - \int_{a'-\xi}^{a'} f(x,y)\,dx,$$

so gelangt man nach dem 3. Satze in X. 10 und XIV. 3 zur Formel

$$J - \int_b^{b'} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x,y)\,dx = \int_a^{a'-\xi} dx \int_b^{b'} f(x,y)\,dy. \quad (5)$$

Lässt man ξ zur Null convergiren, so hat das zweite Glied links den Grenzwerth 0. In der That findet man nach (1), dass wenn nur $0 < \xi < \delta$ ist,

$$\left| \int_b^{b'} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \int_b^{b'} \omega(y)\,dy$$

ist. Demnach ergiebt sich aus (5)

$$J = \lim_{\xi=+0} \int_a^{a'-\xi} dx \int_b^{b'} f(x,y)\,dx$$

d. i. es existirt auch das zweimalige Integral K und zwar ist $J = K$.

2. Satz. „Die Behauptung (S) auf S. 13 ist auch richtig unter den folgenden Bedingungen: 1′) $f(x,y)$ ist stetig in allen Punkten des Rechteckes $ANMP$, das aus dem gegebenen $ABA'B'$ dadurch entsteht, dass man längs $A'B$ einen Streifen von der beliebig kleinen Breite $NB = \xi$, längs $A'B'$ einen solchen von der beliebig kleinen Breite $PB' = \eta$ abschneidet.“

„2′) $f(x,y)$ ist im Rechtecke $PRA'B'$ nicht endlich, es existirt jedoch das Integral

$$\int_b^{b'} f(x,y)\,dy \quad (a \leqq x < a') \quad (6)$$

und zwar convergirt es gleichmässig für alle Werthe von $x: a \leqq x \leqq a' - \xi$ (unter ξ irgend eine Zahl zwischen 0 und $a' - a$ verstanden) d. h. jedem $\varepsilon > 0$ entspricht ein $\delta'(\xi) > 0$ so, dass

$$\left| \int_{b'-\eta}^{b'} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \quad \text{ist, wenn nur} \quad 0 < \eta < \delta'(\xi) \quad (7)$$

ist, mag x was immer für ein Werth im Intervalle $(a, a' - \xi)$ sein.“

„3') $f(x, y)$ ist auch für die Punkte des Rechteckes $NBA'Q$ nicht endlich und es besteht die Voraussetzung 2) des 1. Satzes.“

Beweis. Vermöge der Bedingung 2') können wir aus dem 1. Satze, wenn wir nur daselbst x und y vertauschen und die Function $f(x, y)$ im Rechtecke $ANQB'$ betrachten, unmittelbar die Formel

$$\int_a^{a'-\xi} dx \int_b^{b'} f(x, y)\, dy = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'-\xi} f(x, y)\, dx$$

d. i. (4) ableiten. An dieselbe lassen sich dann die nämlichen Schlüsse knüpfen, wie gerade vorher.

3. Satz. „Wenn $f(x, y)$ sich wie im 2. Satze verhält, die Integrale $\int_a^{a'} f(x, y)\, dx$ und $\int_b^{b'} f(x, y)\, dy$ gleichmässig convergiren, das erstere für alle Werthe von y in jedem Intervalle $(b, b'-\eta)$ $(\eta > 0)$, das letztere für alle Werthe von x in jedem Intervalle $(a, a'-\xi)$ $(\xi > 0)$, und das Integral

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{x} f(x, y)\, dx \quad (= \Phi(x)) \tag{8}$$

für alle x im Intervalle (a, a') d. i. für $a \leq x \leq a'$ existirt und dafür gleichmässig convergirt, so existirt auch das Integral K und zwar ist $J = K$.“

Beweis. Wir dürfen zunächst nach dem 1. Satze die Gleichung (4) ansetzen. Daraus können wir, weil das Integral $J = \Phi(a')$ vorhanden ist, die Gleichung (5) ableiten. Jetzt setzen wir aber

$$\left.\begin{aligned} \int_b^{b'} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx = & \int_b^{b'-\eta} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx \\ & + \int_{b'-\eta}^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx \\ & - \int_{b'-\eta}^{b'} dy \int_a^{a'-\xi} f(x, y)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die gleichmässige Convergenz des Integrals (8) im Intervalle (a, a') von x besagt, dass jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so entspricht, dass wenn nur $0 < \eta < \delta$ ist, dann stets

$$\left| \int_{b'-\eta}^{b'} dy \int_a^x f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

sein muss, mag x was immer für ein Werth im Intervalle (a, a') sein. Lassen wir nun in (9) η einen bestimmten Werth kleiner als δ sein, so sind das zweite und dritte Glied rechts dem Betrage nach kleiner als ε. Wir können aber wegen der gleichmässigen Convergenz des Integrals $\int_a^{a'} f dx$ im Intervalle $(b, b'-\eta)$ von y dem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\eta) > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $0 < \xi < \delta(\eta)$ ist

$$\left| \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Somit erschliessen wir aus (9), dass unter der nämlichen Voraussetzung über ξ

$$\left| \int_b^{b'} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx \right| < (b'-b)\,\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon\,(b'-b+2)$$

ist. Es besteht also auch jetzt die Gleichung

$$\lim_{\xi=+0} \int_b^{b'} dy \int_{a'-\xi}^{a'} f(x, y)\, dx = 0.$$

Demnach folgt aus (5) bei $\lim \xi = +0$ wieder die Formel $J = K$.

Selbstverständlich darf man in den vorstehenden Sätzen x und die darauf bezüglichen Zahlen bezw. mit y und den dazu gehörigen Zahlen vertauschen und umgekehrt.

Da in dem Cauchy'schen Beispiele in Nr. 2 die Integrale J und K von einander verschieden sind, so kann das Integral

$$\int_0^{\xi} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\, dx = \frac{\xi}{y^2 + \xi^2}$$

bei $\lim \xi = +0$ zum Grenzwerthe Null nicht gleichmässig für alle Werthe von y, $0 \leqq y \leqq 1$, convergiren. Dies ist auch leicht nachzuweisen. Soll nämlich

$$\xi : (y^2 + \xi^2) < \varepsilon \tag{a}$$

sein, so muss

$$\frac{\xi}{\varepsilon} < y^2 + \xi^2, \quad \text{also} \quad \frac{1}{4\varepsilon^2} - y^2 < \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \xi\right)^2,$$

somit

$$\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - y^2} < \frac{1}{2\varepsilon} - \xi \quad \text{d. i.} \quad \xi < \frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - y^2}$$

sein. Da nun

$$\lim_{y=+0}\left\{\frac{1}{2\varepsilon}-\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}-y^2}\right\}=0$$

ist, so giebt es zu jeder Zahl $\delta>0$ solche positive Werthe von y, kleiner als 1, dass

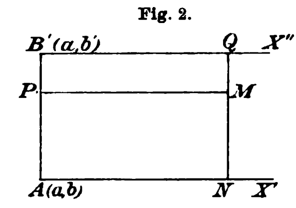
$$\delta>\frac{1}{2\varepsilon}-\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}-y^2}$$

ist. Es ist also unmöglich, eine positive Zahl δ so zu bestimmen, dass wenn nur $0<\xi<\delta$ ist, die Beziehung (a) besteht für jeden Werth von y im Intervalle $(0, 1)$. — Eine ähnliche Bemerkung lässt sich an das Beispiel von P. du Bois-Reymond in Nr. 2 knüpfen.

4. Fortsetzung. Die Beweise der Sätze der vorigen Nummer lassen sich unmittelbar auf den Fall übertragen, dass von den Grenzen aa', bb' eine z. B. a' unendlich ist. Dadurch erhalten wir die folgenden beiden Sätze.

1. Satz. „Auf der Geraden $y=b$ nehmen wir einen Punkt N mit der willkürlichen Abscisse $X>a$ an (Fig. 2) und ziehen NQ parallel zur y-Axe. Wir machen dann die Voraussetzungen: 1) $f(x, y)$ sei stetig in Bezug auf x und y in jedem Punkte des Rechtecks $ANQB'$ mit Einschluss seines Umfanges. 2) Es soll, mag y was immer für ein Werth im Intervalle (b, b') mit Ausschluss von $y=b'$ sein, jedem $\varepsilon>0$ ein $G>0$ so entsprechen, dass falls nur $G<X'<X''$ ist,

Fig. 2.



$$\left|\int_{X'}^{X''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon\,\omega(y) \tag{10}$$

ist, worin $\omega(y)$ eine für jedes solche y eindeutig definirte, positive Function von y bedeutet, welche in jedem Intervalle $(b, b'-\eta)$ $(\eta>0)$ endlich und im Intervalle (b, b') integrirbar ist. Dann existirt natürlich (vgl. S. 389 d. I. T.) für jedes y: $b\leqq y<b'$

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx. \tag{11}$$

Ferner existiren die zweimaligen Integrale

$$J=\int_b^{b'}dy\int_a^\infty f(x,y)\,dx \quad K=\int_a^\infty dx\int_b^{b'} f(x,y)\,dy \tag{12}$$

und zwar ist $J=K$."

Liegt $\omega(y)$ im Intervalle (b, b') unter einer endlichen Zahl L, so kann man in (10) $\varepsilon\omega(y)$ durch εL und dieses, da es jede positive Zahl sein kann, wieder durch ε ersetzen. Es kommt in diesem Falle die zweite Bedingung auf die sogenannte gleichmässige Convergenz des Integrals (11) im Intervalle (b, b') von y hinaus.

2. Satz. Die Gleichung $J = K$ gilt auch unter den nachstehenden Bedingungen. 1') Schneiden wir auf AB' das Stück $PB' = \eta$ ab und ziehen $PM \parallel AN$, so sei $f(x, y)$ stetig in allen Punkten des Rechtecks $ANMP$. 2') $f(x, y)$ ist auch nicht endlich für die Punkte des Rechtecks $PMQB'$; es ist jedoch das Integral

$$\int_b^{b'} f(x, y)\, dy \quad (x \geqq a)$$

vorhanden und zwar convergirt es gleichmässig für alle Werthe von x, $a \leqq x \leqq X$. 3') Die Bedingung 2) des 1. Satzes ist erfüllt.

3. Satz. „Wenn $f(x, y)$ sich so wie im 2. Satze verhält und die Integrale

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx \qquad \int_b^{b'} f(x, y)\, dy$$

gleichmässig convergiren, das erstere für die Werthe von y in jedem Intervalle $(b, b' - \eta)$ $(\eta > 0)$, das letztere für die Werthe von x in jedem Intervalle (a, X) $(X > a)$, so bestehen die folgenden Sätze.

a) Existirt das Integral

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{x} f(x, y)\, dx$$

für alle $x \geqq a$ mit Einschluss von $x = +\infty$ (also auch J) und convergirt es dafür gleichmässig, so ist auch das Integral K vorhanden und man hat $J = K$.

b) Existirt das Integral

$$\int_a^{\infty} dx \int_b^{y} f(x, y)\, dy$$

für jedes y im Intervalle (b, b'), also auch K, und convergirt es dafür gleichmässig, so ist auch das Integral J vorhanden und es ist wieder $J = K$."

Der Satz a) ergiebt sich ganz so, wie der 3. der vorigen Nr.; man hat nur das Intervall $(a'-\xi, a')$ durch (X, ∞) zu ersetzen. Aber auch der Satz b) wird ähnlich gezeigt; nur geht man jetzt von der Formel

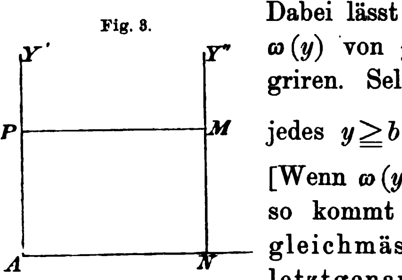
$$\int_a^\infty dx \int_b^{b'-\eta} f(x, y)\, dy = \int_b^{b'-\eta} dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx \quad (13)$$

aus, welche zufolge des 1. Satzes giltig ist.

5. Schluss. Sind die oberen Grenzen a', b' beide $+\infty$, so müssen weitere Beschränkungen herangezogen werden, wenn man der Gleichung $J = K$ sicher sein will.

1. Satz. „Es seien erfüllt die Bedingungen: 1) $f(x, y)$ ist stetig in allen Punkten des Rechtecks $ANMP$ (Fig. 3) zwischen den Abscissen a, X und den Ordinaten b, Y, wobei XY willkürliche Zahlen, nur $X > a$ und $Y > b$, bedeuten. [A ist der Punkt (a, b), M der Punkt (X, Y)]. 2) Es besteht die Ungleichung (10), wenn nur $G < X' < X''$ ist, mag y was immer für ein Werth grösser oder gleich b sein.

Fig. 3.



Dabei lässt sich die positive Function $\omega(y)$ von $y = b$ bis $y = +\infty$ integriren. Selbstverständlich ist dann für jedes $y \geqq b$ $\int_a^\infty f(x, y) dx$ vorhanden. [Wenn $\omega(y)$ für alle $y \geqq b$ endlich ist, so kommt diese Bedingung auf die gleichmässige Convergenz des letztgenannten Integrals für alle $y \geqq b$ hinaus.] 3) Das Integral $\int_b^\infty f(x, y)\, dy$ convergirt gleichmässig in dem beliebigen Intervalle (a, X) von x (S. 19).

Alsdann existiren die zweimaligen Integrale

$$J = \int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx \qquad K = \int_a^\infty dx \int_b^\infty f(x, y)\, dy$$

und zwar ist $J = K$."

Beweis. Weist man x das Intervall (a, X) und y das Intervall $(b, +\infty)$ zu, d. h. dem Punkte xy den unbegrenzten

Parallelstreifen $Y'ANY''$, so lässt sich vermöge der Bedingungen 1) und 2) der 1. Satz von Nr. 4 auf die Function $f(x, y)$ anwenden. Man braucht daselbst nur x und y zu vertauschen. Auf diese Weise gelangt man zur Formel

$$\int_a^X dx \int_b^\infty f(x, y)\, dy = \int_b^\infty dy \int_a^X f(x, y)\, dx. \tag{14}$$

Aus der Bedingung 3) ergiebt sich durch einen ähnlichen Schluss, wie er beim 1. Satze in Nr. 3 bezüglich des dortigen Integrales J gemacht wurde, dass auch das gegenwärtige Integral J vorhanden ist. Nunmehr lässt sich aus der Formel (14) die weitere

$$\int_a^X dx \int_b^\infty f(x, y)\, dy = J - \int_b^\infty dy \int_X^\infty f(x, y)\, dx. \tag{14*}$$

ableiten. Zufolge der Bedingung 2) ist aber, wenn $X > G$ ist,

$$\left| \int_b^\infty dy \int_X^\infty f(x, y)\, dx \right| \leqq \varepsilon \int_b^\infty \omega(y)\, dy.$$

Somit hat der Subtrahend auf der rechten Seite der Gleichung (14*) bei $\lim X = +\infty$ den Grenzwerth 0; wir finden daher aus ihr durch den Grenzübergang $\lim X = +\infty$ die Formel

$$K = \int_a^\infty dx \int_b^\infty f(x, y)\, dy = J.$$

2. Satz. „Wenn die Function $f(x, y)$ sich so verhält wie im 1. Satze, wenn die Integrale

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx \qquad \int_b^\infty f(x, y)\, dy$$

gleichmässig in den beliebigen Intervallen (b, Y), (a, X) convergiren, die Integrale

$$\int_b^\infty dy \int_a^x f(x, y)\, dx \qquad \int_a^\infty dx \int_b^y f(x, y)\, dy \tag{15}$$

gleichmässig convergiren, das erste für alle $x \geqq a$, das zweite für alle $y \geqq b$, und wenn das eine von den beiden Integralen J und K einen Sinn hat, so hat auch das andere einen Sinn und ist jenem gleich.“

Beweis. Angenommen, es existire K. Wir haben nach dem 3. Satze b) in Nr. 4, wenn $Y > b$ ist,

$$\left.\begin{aligned}\int_b^Y dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx &= \int_a^\infty dx \int_b^Y f(x,y)\,dy \\ &= K - \int_a^\infty dx \int_Y^\infty f(x,y)\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass

$$\lim_{Y=+\infty} \int_a^\infty dx \int_Y^\infty f(x,y)\,dy = 0 \tag{17}$$

ist. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned}\int_a^\infty dx \int_Y^\infty f(x,y)\,dy &= \int_a^X dx \int_Y^\infty f(x,y)\,dy \\ &+ \int_X^\infty dx \int_b^\infty f(x,y)\,dy \\ &- \int_X^\infty dx \int_b^Y f(x,y)\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Zufolge der Existenz des Integrals K kann man sich X so gross denken, dass

$$\left| \int_X^\infty dx \int_b^\infty f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \tag{19}$$

ist, und vermöge der gleichmässigen Convergenz des zweiten Integrals (15) für alle $y \geqq b$, zugleich so gross, dass bei jedem $Y > b$

$$\left| \int_X^\infty dx \int_b^Y f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \tag{20}$$

ist. Nun hat man nach dem 3. Satze a) in Nr. 4, wenn man nur x und y vertauscht,

$$\int_a^X dx \int_Y^\infty f(x,y)\,dy = \int_Y^\infty dy \int_a^X f(x,y)\,dx. \tag{21}$$

Da das erste Integral (15) vorhanden ist, so lässt sich zu $\varepsilon > 0$ ein $N(X) > 0$ so ermitteln, dass wenn nur $Y > N(X)$ ist,

$$\left|\int_Y^\infty dy \int_a^X f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \qquad (22)$$

ist. Durch Zusammenfassung der Beziehungen (18)—(22) gelangt man zum Schlusse, dass wenn nur $Y > N(X)$ ist, alsdann stets

$$\left|\int_a^\infty dx \int_Y^\infty f(x, y)\, dy\right| < 3\varepsilon \qquad (23)$$

ist, d. h. es besteht die Formel (17). Mit ihrer Hilfe ergiebt sich endlich aus (16) durch den Grenzübergang $\lim Y = +\infty$ die gewünschte Formel $J = K$.

6. Differentialquotient eines einfachen bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Die wichtigste Anwendung der Sätze in Nr. 3 und 4 bildet die Differenzirung eines bestimmten Integrals nach einem reellen Parameter.

Satz.[1]) „Es sei für die Werthe von y: $h \leqq y \leqq h + d$ das bestimmte Integral

$$\Psi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \qquad (24)$$

wo b auch $+\infty$ sein kann, vorhanden. Wenn die reelle oder complexe Function $f(x, y)$ mindestens für jedes System $x\, y$, worin x einen Werth im Intervalle (a, b) mit Ausschluss von b, y einen im Intervalle $(h, h + d)$ bezeichnet, einen endlichen partiellen Differentialquotienten $f_y'(x, y)$ nach y besitzt; wenn ferner für die soeben genannten Werthe von y das Integral

$$\int_b^a f_y'(x, y)\, dx \qquad (25)$$

existirt und gleichmässig convergirt, so hat man

$$\lim_{\eta = +0} \frac{\Psi(h + \eta) - \Psi(h)}{\eta} = \int_a^b f_y'(x, h)\, dx.\text{“} \qquad (26)$$

1) Derselbe Satz bei de la Vallée-Poussin (Ann. de la soc. scient. de Bruxelles XVI 2. p. S. 171). Daselbst auch das 2. und 3. Beispiel.

Ein ähnlicher Satz besteht für den hinteren Differentialquotienten von $\Psi(y)$ bei $y = h$, wobei man sich d negativ zu denken hat.

Beweis. Wir haben nach dem 1. Satze in Nr. 3 oder 4, falls nur $0 < \eta \leqq d$ ist,

$$\int_h^{h+\eta} dy \int_a^b f_y'(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_h^{h+\eta} f_y'(x, y)\, dy. \quad (27)$$

Da

$$\int_h^{h+\eta} f_y'(x, y)\, dy = \Big| _{y=h}^{y=h+\eta} f(x, y) = f(x, h + \eta) - f(x, h)$$

ist und das Integral (24) sowohl für $y = h$ als auch für $y = h + d$ einen Sinn hat, dürfen wir die Formel (27) so schreiben:

$$\int_h^{h+\eta} dy \int_a^b f_y'(x, y)\, dx = \Psi(h + \eta) - \Psi(h).$$

Dividiren wir diese Gleichung durch η und lassen η zum Grenzwerthe $+0$ convergiren, so erhalten wir nach dem 9. Satze in X. 6, bezw. den 8. Satz in XIV. 2 unmittelbar die Formel (26).

Beispiele. 1) Mit Hilfe des vorstehenden Satzes lassen sich die Differentialquotienten der als Beispiele zu X. 22 angeführten bestimmten Integrale mit Leichtigkeit ermitteln. Dort sind zunächst vorgelegt die Integrale

$$\Phi(y) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos yx}{x}\, dx \qquad \Psi(y) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin yx}{x}\, dx.$$

Der Kürze halber wollen wir sie zu dem complexen Ausdrucke

$$F(y) = \Phi(y) - i\,\Psi(y) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - e^{yxi}}{x}\, dx$$

zusammenfassen. Das Integral (25) ist nunmehr

$$-i \int_0^\infty e^{(-1 + yi)x}\, dx.$$

Es handelt sich demnach darum, zu untersuchen, ob das Integral

$$\int_X^\infty e^{(-1 + y_1 i)x}\, dx \quad \text{bei } \lim X = +\infty$$

gleichmässig für alle Werthe y_1 von $y - d$ bis $y + d$ zur Null convergirt. Nach S. 65 d. II. T. ist

$$\int e^{(-1+y_1 i)x}\, dx = -\frac{e^{(-1+y_1 i)x}}{1-y_1 i},$$

also

$$\int_X^\infty e^{(-1+y_1 i)x}\, dx = \frac{e^{(-1+y_1 i)X}}{1-y_1 i}. \tag{28}$$

Somit ist

$$\left|\int_X^\infty e^{(-1+y_1 i)x}\, dy\right| = \frac{e^{-X}}{\sqrt{1+y_1^2}} \leqq e^{-X},$$

in welcher Formel die soeben geforderte gleichmässige Convergenz liegt, da e^{-X} bei $\lim X = +\infty$ zur Null convergirt. Wir finden demnach

$$F'(y) = -i\int_0^\infty e^{(-1+yi)x}\, dx$$

d. h. nach der Formel (28), wenn darin $y_1 = y$ $X = 0$ gesetzt wird,

$$F'(y) = \frac{-i}{1-yi} = \frac{y}{1+y^2} - \frac{i}{1+y^2}.$$

Dies Ergebniss stimmt mit dem a. a. O. gefundenen überein.

Noch leichter sind die übrigen Beispiele a. a. O. zu erledigen.

Bei der Untersuchung eines bestimmten Integrals, das einen Parameter enthält, auf gleichmässige Convergenz in Bezug auf ein Intervall desselben thut, wie die folgenden Beispiele lehren, die partielle Integration oft gute Dienste.

2) Wenn wir in dem Integral

$$\Phi(y) = \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+x^2}\, dx \qquad (y > 0)$$

unter dem $\int$ nach y differenziren, so erhalten wir das nach dem Satze in X. 12 convergente Integral

$$-\int_0^\infty \frac{x \sin yx}{1+x^2}\, dx.$$

Dasselbe convergirt gleichmässig für alle $y \geqq b$, unter b irgend eine feste positive Zahl verstanden. Wir haben nämlich bei partieller Integration

$$\int_X^\infty \frac{x\sin yx}{1+x^2}\, dx = \Big|_X^\infty -\frac{x\cos yx}{(1+x^2)y} + \frac{1}{y}\int_X^\infty \left\{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\right\}\cos yx\, dx$$

und schliessen hieraus, weil

$$\Big|_X^\infty -\frac{x\cos yx}{(1+x^2)y} = \frac{X\cos yX}{(1+X^2)y} - \lim_{x=+\infty} \frac{x\cos yx}{(1+x^2)y} = \frac{X\cos yX}{(1+X^2)y}$$

ist,

$$\left|\int_X^\infty \frac{x\sin yx}{1+x^2}\, dx\right| < \frac{1}{b}\left\{\frac{X}{1+X^2} + \int_X^\infty \frac{dx}{1+x^2} + \int_X^\infty \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\, dx\right\}.$$

Die rechte Seite enthält y gar nicht und convergirt bei $\lim X = +\infty$ zur Null; es ist somit die obige gleichmässige Convergenz in der That vorhanden.

Da man, wenn $y > 0$ gegeben ist, zwischen 0 und y noch immer eine Zahl b einschalten kann, so gilt dem Vorstehenden zufolge die Formel

$$\Phi'(y) = -\int_0^\infty \frac{x \sin yx}{1+x^2}\, dx. \tag{29}$$

3) Noch sei vorgelegt das Integral[1])

$$\Psi(y) = \int_0^\infty \cos\,[x^3 - yx]\, dx. \tag{30}$$

Es macht schon einige Mühe, sich davon zu überzeugen, dass dieses Integral einen Sinn hat. Doch dürfte es genügen zu bemerken, dass man nur im Integral (30) nach X. 15 für x denjenigen Zweig der durch die Gleichung

$$x^3 - yx = z$$

definirten algebraischen Function von z, welcher zugleich mit z ins Unendliche wächst, einzuführen und hierauf den Satz in X. 12 anzuwenden hat. — Differenzirt man in (30) unter dem $\int$ nach y, so gelangt man zu dem Integral

$$\int_0^\infty x \sin (x^3 - yx)\, dx,$$

das sich nach dem soeben erwähnten Verfahren als vorhanden erweist. Dasselbe convergirt gleichmässig für alle Werthe von y, deren Betrag eine beliebig gegebene positive Zahl B nicht übersteigt. Dies lässt sich so zeigen. Wir finden durch Zerlegung der Function unter dem $\int$

$$\left.\begin{aligned} R(X) &= \int_X^\infty x \sin (x^3 - yx)\, dx \\ &= \int_X^\infty \frac{3x^2 - y}{3x} \sin (x^3 - yx)\, dx \\ &+ \frac{y}{3}\int_X^\infty \frac{3x^2 - y}{3x^3} \sin (x^3 - yx)\, dx + \frac{y^2}{9}\int_X^\infty \frac{\sin (x^3 - yx)}{x^3}\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Das erste und zweite Integral rechts convergiren, wie durch partielle Integration erhellt, gleichmässig für alle Werthe von y. In der That haben wir z. B. für das erste

1) Ueber dieses Integral, das in der Theorie des Regenbogens vorkommt, vgl. Stokes Math. and phys. Papers II. S. 332.

$$\int_X^\infty \frac{3x^2-y}{3x}\sin(x^3-yx)\,dx = \Big|_X^\infty - \frac{\cos(x^3-yx)}{3x} - \frac{1}{3}\int_X^\infty \frac{\cos(x^3-yx)}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{\cos(X^3-yX)}{3X} - \frac{1}{3}\int_X^\infty \frac{\cos(x^3-yx)}{x^2}\,dx,$$

somit ist

$$\left|\int_X^\infty \frac{3x^2-y}{3x}\sin(x^3-yx)\,dx\right| < \frac{1}{3X} + \frac{1}{3}\int_X^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{3X},$$

wobei die rechte Seite y nicht enthält und bei $\lim X = +\infty$ zur Null convergirt. Das dritte Integral in (31) ist seinem Betrage nach kleiner als

$$\int_X^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2X^2}.$$

Nach allen diesem giebt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von y nicht abhängige Zahl $G > 0$ so, dass wenn nur $X > G$ ist, jedes der drei Integrale in (31) seinem Betrage nach kleiner als ε ist. Daraus folgt, dass wenn $X > G$ und $|y| \leqq B$ ist, alsdann stets

$$|R(X)| < \varepsilon\left(1 + \frac{B}{3} + \frac{B^2}{9}\right)$$

ist, wodurch die obige Behauptung erwiesen ist.

Demnach gilt für jeden Werth von y die Formel

$$\Psi'(y) = \int_0^\infty x\sin(x^3-yx)\,dx. \tag{32}$$

Differenzirt man neuerdings unter dem $\int$ nach y, so erhält man ein Integral ohne Sinn. Das Integral

$$\int_0^X x^2\cos(x^3-yx)\,dx$$

convergirt nämlich bei $\lim X = +\infty$ nicht zu einem endlichen Grenzwerthe, wie sich durch die früher erwähnte Substitution für x in Verbindung mit der Bemerkung ergiebt, dass ein Integral von der Form

$$\int_a^\infty \psi(z)\cos z\,dz$$

unmöglich convergiren kann, wenn $\psi(z)$ sich bei $\lim z = +\infty$ monoton einem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerthe c nähert. [Wäre es nämlich vorhanden, so würde auch

$$\int_a^\infty \psi(z)\cos z\,dz - \int_a^\infty (\psi(z)-c)\cos z\,dz = \int_a^\infty c\cos z\,dz$$

einen Sinn haben, was ja nicht der Fall ist.]

7. Fortsetzung. Für den Fall, dass wie beim Integral (32) das Integral (25) ohne Bedeutung ist, hat de la Vallée-Poussin[1]) ein anderes Verfahren angegeben, um den Differentialquotienten des Integrals (24) zu ermitteln. Es sei z. B. vorgelegt das Integral

$$\Phi(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

und zwar soll es einen Sinn haben für alle y im Intervalle (b, b'). Dabei nehmen wir an, dass sowohl $f(x, y)$, als auch $f_y'(x, y)$ in allen Punkten eines jeden Rechteckes $ANQB'$ (Fig. 2 auf S. 18), stetig sei. Mithin ist

$$f(x, y) - f(x, b) = \int_b^y f_y'(x, y)\, dy.$$

Integriren wir die beiden Seiten dieser Gleichung nach x von $x = a$ bis $x = X$ und machen den Grenzübergang $\lim X = +\infty$, so finden wir

$$\Phi(y) = \Phi(b) + \lim_{X=+\infty} \int_a^X dx \int_b^y f_y'(x, y)\, dy.$$

Nun ist nach dem 1. Satze auf S. 2

$$\int_a^X dx \int_b^y f_y'(x, y)\, dy = \int_b^y dy \int_a^X f_y'(x, y)\, dx,$$

also

$$\Phi(y) = \Phi(b) + \lim_{X=+\infty} \int_b^y dy \int_a^X f_y'(x, y)\, dx. \tag{33}$$

Wenn nun

$$\lim_{X=+\infty} \int_b^y dy \int_a^X f_y'(x, y)\, dx = \int_b^y dy \int_a^\infty f_y'(x, y)\, dx$$

ist, so ergiebt sich aus (33)

$$\Phi(y) = \Phi(b) + \int_b^y dy \int_a^\infty f_y'(x, y)\, dx.$$

Wir haben demnach

$$\Phi'(y) = \int_a^\infty f_y'(x, y)\, dx.$$

---

1) Vgl. Ann. u. s. w. S. 173.

Sollte indess das letzte Integral ohne Bedeutung sein, so kann gleichwohl die Formel (33) zur Entwickelung von $\Phi(y)$ führen. Dies ist sicher dann der Fall, wenn man eine solche Zerlegung:

$$\int_a^X f_y'(x, y)\,dx = \varphi(X, y) + \int_a^X \psi(x, y)\,dx \tag{34}$$

herstellen kann, dass

$$\lim_{X=+\infty} \int_b^y \varphi(X, y)\,dy = 0 \tag{35}$$

ist, und das Integral

$$\int_a^\infty \psi(x, y)\,dx$$

gleichmässig im Intervalle (b, b') von y convergirt. In der That hat man zufolge (34)

$$\left.\begin{aligned} \int_b^y dy \int_a^X f_y'(x, y)\,dx &= \int_b^y \varphi(X, y)\,dy \\ &\quad + \int_b^y dy \int_a^X \psi(x, y)\,dx \\ &= \int_b^y \varphi(X, y)\,dy \\ &\quad + \int_a^X dx \int_b^y \psi(x, y)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Nach dem 1. Satze in Nr. 4 ist nun

$$\int_a^\infty dx \int_y^b \psi(x, y)\,dx = \int_b^y dy \int_a^\infty \psi(x, y)\,dx.$$

Vermöge dieser und der Formel (35) ergiebt sich aus (36) durch den Grenzübergang $\lim X = +\infty$

$$\lim_{X=+\infty} \int_b^y dy \int_a^X f_y'(x, y)\,dx = \int_b^y dy \int_a^\infty \psi(x, y)\,dx.$$

Berücksichtigt man diese Umformung in der Gleichung (33), so gewinnt man daraus sofort die Formel

$$\Phi'(y) = \int_a^\infty \psi(x, y)\,dx. \tag{37}$$

Den vorstehenden Satz kann man auf das Integral (32) anwenden. Wir finden

$$f_y'(x, y) = -x^2 \cos(x^3 - yx)$$

und setzen

$$\left.\begin{aligned}\int_0^X x^2 \cos(x^3 - yx)\,dx = \int_0^X \frac{3x^2 - y}{3} \cos(x^3 - yx)\,dx \\ + \frac{y}{3}\int_0^X \cos(x^3 - yx)\,dx = \frac{\sin(X^3 - yX)}{3} \\ + \frac{y}{3}\int_0^X \cos(x^3 - yx)\,dx.\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Nunmehr ist

$$\int_b^y \varphi(X, y)\,dy = -\frac{1}{3}\int_b^y \sin(X^3 - yX)\,dy = -\frac{1}{3}\left|\frac{\cos(X^3 - yX)}{X}\right|_b^y$$

$$= \frac{\cos(X^3 - bX) - \cos(X^3 - yX)}{3X};$$

es besteht mithin die Formel (35). Ferner convergirt das Integral

$$\int_0^\infty \cos(x^3 - yx)\,dx$$

gleichmässig in jedem endlichen Intervalle von y d. i. wenn nur $|y| \leqq B$ ist. Hierzu braucht man nur zu bemerken, dass

$$\int_X^\infty \cos(x^3 - yx)\,dx = \int_X^\infty \frac{3x^2 - y}{3x^2} \cos(x^3 - yx)\,dx$$

$$+ \frac{y}{3}\int_X^\infty \frac{\cos(x^3 - yx)}{x^2}\,dx$$

ist und der erste Theil rechts bei partieller Integration den Ausdruck

$$-\frac{\sin(X^3 - yX)}{3X^2} - \frac{2}{3}\int_X^\infty \frac{\sin(x^3 - yx)}{x^3}\,dx$$

liefert. Demnach ist

$$\left|\int_X^\infty \cos(x^3 - yx)\,dx\right| < \frac{1}{3X^2} + \frac{2}{3}\int_X^\infty \frac{dx}{x^3} + \frac{B}{3}\int_X^\infty \frac{dx}{x^2},$$

also kleiner als $\frac{2}{3X^2} + \frac{B}{3X}$, wodurch unsere Behauptung als richtig erwiesen ist.

Demnach dürfen wir aus der Formel (38) schliessen, dass

$$\Psi''(y) = -\frac{y}{3}\int_0^\infty \cos(x^3 - yx)\,dx = -\frac{y}{3}\Psi(y)$$

ist. $\Psi(y)$ genügt somit der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z'' + \frac{yz}{3} = 0.$$

8. Weitere Anwendungen der Sätze in Nr. 3—5.

Die Gleichung $J = K$ liefert, wenn alle Integrationen bis auf eine ausführbar sind, den Werth eines bestimmten Integrals.

Beispiele. 1) „Wenn $0 < a < b$ ist, so hat man

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^\infty e^{-xy} dx.\text{“} \qquad (38^*)$$

Dies folgt unmittelbar aus dem 1. Satze in Nr. 4, da

$$\int_X^\infty e^{-xy} dx = \frac{e^{-Xy}}{y} \quad \text{also} \quad \int_X^\infty e^{-xy} dx < e^{-aX} : a$$

ist, somit $\int_0^\infty e^{-xy} dy$ gleichmässig im Intervalle (a, b) von y convergirt. Aus (38*) ergiebt sich durch Ausführung von drei Integrationen die Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = l\left(\frac{b}{a}\right) \quad (0 < a < b).$$

Man wird leicht die folgenden allgemeineren Formeln beweisen. Es seien die Function $\varphi(u)$ und ihr Differentialquotient $\varphi'(u)$ für jedes positive u stetig, und es habe $\varphi(u)$ bei $\lim u = +\infty$ und bei $\lim u = +0$ endliche Grenzwerthe $\varkappa$, λ.

Alsdann gilt die Formel

$$\int_0^\infty dx \int_a^b \varphi'(xy)\, dy = \int_a^b dy \int_0^\infty \varphi'(xy)\, dx.$$

Daraus ergiebt sich durch Ausführung von drei Integrationen die Frullani'sche Formel

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(bx) - \varphi(ax)}{x} dx = (\varkappa - \lambda)\, l\left(\frac{b}{a}\right) \quad (0 < a < b).$$

2) Ebenso einfach zeigt man, dass

$$\int_0^\infty dx \int_0^a e^{(-y+bi)x} dy = \int_0^a dy \int_0^\infty e^{(-y+bi)x} dx \qquad (a > 0,\ b \gtrless 0)$$

sein muss, woraus dann die Formel

$$\int_0^\infty e^{bxi} \frac{1 - e^{-ax}}{x} dx = l\left(1 + \frac{a}{b} i\right)$$

folgt.

3)[1] Wir haben auf S. 392 d. I. T. die Formel

$$\int_0^\infty e^{-ay} \sin xy\, dy = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

1) De la Vallée-Poussin a. a. O. S. 167.

Daher ist nach X. 12

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx \int_0^\infty e^{-ay} \sin xy\, dy = \int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{a^2+x^2}.$$

Es ist nun

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx \int_0^\infty e^{-ay} \sin xy \,.\, dy = \int_0^\infty e^{-ay}\, dy \int_0^\infty \frac{\cos x \sin yx}{x}\, dx. \quad (39)$$

Um diese Formel zu beweisen, zerlegen wir das Intervall $(0, \infty)$ von y in drei Theile $(0, 1)$, $(1, b)$, (b, ∞), wo $b > 1$ ist. Dann ergiebt sich zunächst aus dem 1. Satze in Nr. 5 bei Vertauschung von x und y, dass

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx \int_b^\infty e^{-ay} \sin xy \,.\, dy = \int_b^\infty e^{-ay}\, dy \int_0^\infty \frac{\cos x \sin yx}{x}\, dx \quad (40)$$

ist. Denn erstens convergirt

$$\cos x \int_0^\infty e^{-ay} \frac{\sin xy}{x}\, dy$$

gleichmässig für alle $x \geqq 0$. Es ist ja $|\sin xy| : xy < 1$, somit

$$\left| \cos x \int_Y^\infty e^{-ay} \frac{\sin xy}{x}\, dy \right| < \int_Y^\infty y e^{-ay}\, dy.$$

Zweitens convergirt

$$e^{-ay} \int_0^\infty \frac{\cos x \sin yx}{x}\, dx \quad (41)$$

gleichmässig für alle $y \geqq b$. Setzen wir

$$2 \cos x \sin yx = \sin (y+1)\, x + \sin (y-1)\, x,$$

so haben wir

$$\int_X^\infty \frac{\cos x \sin yx}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_X^\infty \frac{\sin (y+1)\, x}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int_X^\infty \frac{\sin (y-1)\, x}{x}\, dx. \quad (42)$$

Durch partielle Integration erhalten wir, wenn nur y nicht gleich 1 oder -1 ist,

$$\left.\begin{aligned} \int_X^\infty \frac{\sin (y \pm 1)\, x}{x}\, dx &= \Big|_X^\infty - \frac{\cos (y \pm 1)\, x}{(y \pm 1)\, x} - \frac{1}{(y \pm 1)} \int_X^\infty \frac{\cos (y \pm 1)\, x}{x^2}\, dx \\ &= \frac{\cos (y \pm 1)\, X}{(y \pm 1)\, X} - \frac{1}{(y \pm 1)} \int_X^\infty \frac{\cos (y \pm 1)\, x}{x^2}\, dx. \end{aligned}\right\} (43)$$

Falls nun $y \geqq b$ ist, so ergiebt sich demnach aus (42), dass

$$\left| \int_X^\infty \frac{\cos x \sin yx}{x}\, dx \right| < \frac{1}{2} \frac{1}{(b+1)} \left[\frac{1}{X} + \int_X^\infty \frac{dx}{x^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{b-1} \left[\frac{1}{X} + \int_X^\infty \frac{dx}{x^2} \right]$$

d. i. kleiner als

$$\frac{1}{(b+1)}\frac{1}{X}+\frac{1}{(b-1)X}=\frac{2b}{b^2-1}\frac{1}{X}$$

ist. Darin liegt aber die gleichmässige Convergenz des Integrals (41) für $y \geqq b$.

Ferner haben wir vermöge des Satzes 3b) in Nr 4

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx \int_0^1 e^{-ay} \sin yx\,dy = \int_0^1 e^{-ay}\,dy \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \sin yx\,dx. \quad (44)$$

Denn erstens convergirt das Integral (41) gleichmässig in jedem Intervalle $(0, 1-\eta)$ von y, wo $\eta > 0$ ist. Dies zeigt wieder die Formel (43). Zweitens convergirt das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx \int_0^y e^{-ay} \sin yx\,dy$$

gleichmässig im Intervalle (0, 1) von y. In der That ist nach der Formel (7b) auf S. 267 d. I. T.

$$\int_X^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx \int_0^y e^{-ay} \sin yx\,dy$$

$$= \int_X^\infty \frac{\cos x}{x}\,\frac{e^{-ay}(-a\sin yx - x\cos yx)+x}{a^2+x^2}\,dx = \int_X^\infty \frac{\cos x\,(1-e^{-ay}\cos yx)}{a^2+x^2}\,dx$$

$$- a e^{-ay} \int_X^\infty \frac{\sin yx \cos x}{x(a^2+x^2)}\,dx$$

$$\left| \int_X^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx \int_0^y e^{-ay} \sin yx\,dx \right| < 2\int_X^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$+ a\int_X^\infty \frac{dx}{x(a^2+x^2)} < \frac{2+a}{X},$$

wodurch auch die zweite Behauptung gerechtfertigt ist.

Auf die nämliche Weise gelangen wir endlich zur Formel

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \int_1^b e^{-ay} \sin yx\,dy = \int_1^b e^{-ay}\,dy \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \sin yx\,dx. \quad (45)$$

Durch Addition der Gleichungen (40), (44), (45) erhalten wir schliesslich die Formel (39).

Die beiden Integrationen auf der rechten Seite derselben lassen sich ausführen. Setzen wir in (42) $X=0$ und bemerken, dass je nachdem u positiv oder negativ ist,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2},$$

so finden wir, je nachdem y grösser oder kleiner als 1 ist,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \sin yx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right\} \text{d. i. } \frac{\pi}{2} \text{ oder } 0.$$

Wir erhalten somit nach (39)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-ya}\,dy = \frac{\pi}{2a}e^{-a}.$$

Diese Formel ist uns schon aus II. S. 233 bekannt. Ersetzt man darin x durch ax, so ergiebt sich das auf S. 25 angeführte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

woraus wir nach der Formel (29) die weitere,

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

ableiten können.

4) Das Integral[1])

$$\mathsf{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

geht durch die Substitution

$$x = y:(1+y)$$

über in das Euler'sche Integral erster Art (vgl. I. S. 406), es ist nämlich

$$\mathsf{B}(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy. \tag{45*}$$

Dasselbe lässt sich, wie wir jetzt zeigen wollen, durch Gammafunctionen darstellen.

Führen wir in dem Ausdruck der letzteren a. a. O.

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}\,dx$$

anstatt x kx ein, wo k positiv sein soll, so können wir die Formel auch so schreiben:

$$\frac{1}{k^u} = \frac{1}{\Gamma(u)}\int_0^\infty x^{u-1}e^{-kx}\,dx.$$

Wir finden demnach, indem wir $k = 1+y$, $u = \alpha+\beta$ nehmen und das so erhaltene Integral anstatt $1:(1+y)^{\alpha+\beta}$ in (45*) einsetzen, die Formel

$$\mathsf{B}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}\,dy\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x-xy}\,dx. \tag{46}$$

---

1) Das Zeichen $B(\alpha,\beta)$ hat Binet eingeführt (J. de l'Éc. polyt. Cah. 27 p. 131).

In diesem zweimaligen Integrale kann die Reihenfolge der beiden Integrationen umgekehrt werden, ohne dass sein Werth sich ändert, d. h. es besteht die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty y^{\alpha-1}dy\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x-xy}dx\\&=\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-xy}dy.\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

Dies lässt sich leicht mit Hilfe der Sätze in Nr. 4 und 5 zeigen.[1]) Wir werden den Nachweis der Formel (47) in XVIII, 16 auf Grund des Umstandes, dass die Function

$$x^{\alpha+\beta-1}y^{\alpha-1}e^{-x-xy}=F(x,y)$$

ein uneigentliches Doppelintegral über den Winkel XOY besitzt, liefern.

Machen wir hinter dem zweiten $\int$ auf der rechten Seite von (47) die Substitution $xy=u$, so geht sie über in

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}dx\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du=\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha).$$

Somit gelangen wir mittelst der Formeln (46) und (47) zur Euler'schen Formel[2])

---

1) Man zerlegt die linke Seite von (47) in die drei Theile

$$\int_0^b dy\int_0^a F(x,y)\,dx+\int_b^\infty dy\int_a^\infty F(x,y)\,dx$$
$$+\int_b^\infty dy\int_0^a F(x,y)\,dx,$$

worin a und b beliebige positive Zahlen sind, und wendet auf den ersten den 2. Satz von Nr. 4, auf den zweiten den 1. Satz von Nr. 5, endlich auf den dritten den 3. Satz b) von Nr. 4 an.

2) Die Formel (48) rührt von Euler her (vgl. dessen Integralrechnung, deutsch von Salomon IV. B. S. 89), wozu zu bemerken ist, dass nach Euler

$$\Gamma(u)=\int_0^1\left[l\frac{1}{x}\right]^{u-1}dx$$

zu setzen ist. Für dieses Integral führte Legendre später das Zeichen $\Gamma(u)$ ein. Der hier angedeutete Beweis der genannten Formel stammt von Dirichlet (vgl. Meyer, bestimmte Integrale 1871 § 43) und wurde von de la Vallée-Poussin (a. a. O. S. 175) verbessert. Einen dritten Beweis der Formel (48) s. XVIII, 20.

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{48}$$

lässt man darin $\beta = 1 - \alpha$ sein, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass $\Gamma(1) = 1$ ist, und auf die Formel (18) auf S. 434 d. I. T. im Falle, dass $0 < \alpha < 1$ ist, die Gleichung

$$\left(\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{1+y}\, dy = \right) \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Hieraus ergiebt sich durch die Annahme $\alpha = 1:2$, neuerdings die Formel

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

XVII. Abschnitt.

Das eigentliche Doppelintegral.

1. Der stetige Bereich von zwei Dimensionen.

Bezeichnen wir die Gesammtheit aller reellen Zahlen als eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension, so heisst die Gesammtheit aller reellen Zahlen zwischen zwei bestimmten von ihnen mit Einschluss derselben ein aus der genannten Mannigfaltigkeit herausgehobener stetiger Bereich. Bevor wir zur Erklärung des eigentlichen bestimmten Integrals einer Function einer Veränderlichen x schreiten, haben wir die letztere auf einen solchen Bereich, nämlich den von den Grenzen des Integrals eingeschlossenen, zu beschränken. Ebenso geht der Erklärung des eigentlichen Doppelintegrals einer Function von zwei Veränderlichen xy vorauf die Beschränkung der letzteren auf einen (d. i. einen zusammenhängenden) stetigen Bereich von zwei Dimensionen, welcher der von allen Systemen (oder Stellen) von zwei von einander unabhängigen reellen Zahlen x, y gebildeten Mannigfaltigkeit (von zwei Dimensionen) angehört.

Die rein analytische Erklärung eines derartigen Bereiches als Punktsystem gestaltet sich etwas umständlicher, als die des stetigen Bereiches von einer Dimension. Dagegen ist die geometrische Darstellung des zweidimensionalen Continuums allgemein geläufig, weshalb wir sie zunächst bringen wollen. — Denken wir uns die Zahlen xy als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene XOY construirt, so erscheint als stetiger Bereich von zwei Dimensionen jede im Endlichen liegende, von gewöhnlichen einfachen Rändern in endlicher Anzahl begrenzte Fläche $\mathfrak{F}$.

Als gewöhnlich bezeichnen wir aber eine geschlossene oder offene Linie, welche mit jeder Parallelen sowohl zur

x-, als zur y-Axe höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein hat. Dabei sind, falls die Linie eine ganze Strecke weit mit einer solchen Geraden zusammenfallen sollte, in jene Anzahl nur die beiden Endpunkte der Strecke aufzunehmen. Demnach gehört zu den gewöhnlichen Linien insbesondere jede zu einer der beiden Axen parallele Strecke.

Die den Punkten einer Fläche $\mathfrak{F}$ von der angegebenen Beschaffenheit entsprechenden Werthsysteme xy lassen sich analytisch durch Ungleichungen charakterisiren, wodurch die geometrische Form ihrer Erklärung abgestreift wird. Z. B. anstatt des auf S. 12 gezeichneten Rechteckes $ABA'B'$ kann man, wie bereits bemerkt, sagen: Gesammtheit aller Systeme xy, wobei x und y den Bedingungen genügen, dass

$$a \leqq x \leqq a' \quad b \leqq y \leqq b' \tag{1}$$

ist. Die Gesammtheit aller Systeme xy, welche die Beziehung

$$x^2 + y^2 \leqq r^2 \tag{2}$$

erfüllen, ist gleichbedeutend mit der Fläche des Kreises, welcher vom Anfangspunkte mit dem Radius r beschrieben wird. U. s. f.

Um auszudrücken, dass ein Bereich nicht in getrennte Theile zerfalle, fügen wir zu den Ungleichungen die Bestimmung: „Sind (a, b) und (a', b') irgend zwei Stellen des Bereiches und sind a und a' von einander verschieden, so muss es zu jedem Werthe x zwischen a und a' mindestens eine Stelle xy im Bereiche geben. Desgleichen muss es, wenn b und b' von einander verschieden sind, zu jedem Werthe y zwischen b und b' mindestens eine Stelle xy im Bereiche geben.[1])

Man kann die zusammenhängende Fläche in der xy-Ebene mit einem Vorzeichen versehen und zwar gilt sie als positiv oder negativ, je nachdem der äussere Rand in Bezug auf einen innerhalb der Fläche aufgestellten Beobachter im positiven oder negativen Sinne beschrieben wird (XI. 3). Als positiv gilt die der Drehungsrichtung des Uhrzeigers ent-

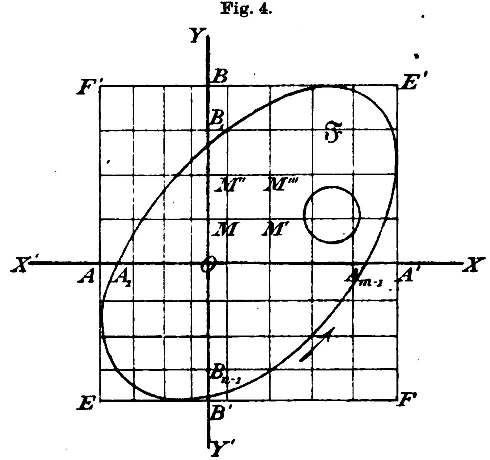
---

1) Die rein analytische Erklärung eines stetigen Bereiches von beliebig vielen Dimensionen findet man in Nr. 15 angeführt.

gegengesetzte. Wenn die Fläche als Integrationsgebiet für ein Doppelintegral auftritt, so denkt man sie sich immer mit ihrem Zeichen genommen.

2. Die Theilungen des Integrationsgebietes $\mathfrak{F}$. Das Flächenstück $\mathfrak{F}$ wird mit einem System von geradlinig begrenzten Zellen überdeckt. Am einfachsten wird dies dadurch bewerkstelligt, dass man über die Fläche $\mathfrak{F}$ ein System von Parallelen zur Axe OX und eines von Parallelen zur Axe OY zieht. Sind $OA = a$ und $OA' = a'$ (Fig. 4) die äussersten Werthe unter den Abscissen der Punkte des

Fig. 4.



äusseren Randes von $\mathfrak{F}$, so zerlege man $a' - a$ in beliebig viele mit $a' - a$ gleichbezeichnete Theile $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m$, so dass

$$a' - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m \tag{3}$$

ist, und ziehe durch die Punkte $A A_1 \ldots A_{m-1} A'$ auf der Axe XX' mit den Abscissen

$$a_0 = a,\ a_1 = a + \delta_1 \ldots a_r = a_{r-1} + \delta_r \ldots a_m = a_{m-1} + \delta_m = a' \tag{4}$$

die Parallelen zu dieser Axe. Desgleichen wird der Unterschied der äussersten Werthe $OB = b$ $OB' = b'$ unter den Ordinaten der Punkte jenes Randes in beliebig viele mit $b' - b$ gleichbezeichnete Theile $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ getheilt, so dass

$$b' - b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n \tag{5}$$

ist, und durch die Punkte $B B_1 \ldots B_{n-1} B'$ auf der Axe YY' mit den Ordinaten

$$b_0 = b,\ b_1 = b + \varepsilon_1 \ldots b_\varsigma = b_{\varsigma - 1} + \varepsilon_\varsigma \ldots b_n = b_{n-1} + \varepsilon_n = b' \quad (6)$$

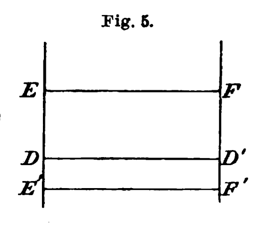
die Parallelen zur x-Axe gezogen. Dadurch wird das Rechteck $EFE'F'$, welches die Fläche $\mathfrak{F}$ umschliesst, in mn Rechtecke getheilt, worunter im Allgemeinen drei Klassen zu unterscheiden sind, nämlich 1) diejenigen, zu welchen kein Punkt $\mathfrak{F}$ gehört, 2) diejenigen, welche nur Punkte von $\mathfrak{F}$ enthalten, und endlich 3) jene, zu welchen sowohl Punkte von $\mathfrak{F}$ als auch andere Punkte der Ebene gehören. Von der Gesammtheit der die zweite und dritte Klasse bildenden Rechtecke sagen wir, dass sie das Gebiet $\mathfrak{F}$ gerade bedecken. [In dem besonderen Falle, dass das Rechteck $EFE'F'$ zwischen den Abscissen a, a' und den Ordinaten b, b' selbst das vorgelegte Gebiet $\mathfrak{F}$ ist, entfallen die erste und dritte von den obigen Klassen.] — Alle Rechteckchen $MM'M'''M'' = MM' \,.\, MM'' = \delta_r \varepsilon_s$ (worin M, M', M'', M''' bez. die Punkte (a_{r-1}, b_{s-1}), (a_r, b_{s-1}), (a_{r-1}, b_s), (a_r, b_s) bedeuten) sollen dasselbe Zeichen besitzen, wie die Fläche $\mathfrak{F}$, deren Zeichen als gegeben vorausgesetzt wird. Demnach hat der Umlauf $MM'M'''M''$ in dem nämlichen Sinne zu erfolgen, wie der des äusseren Randes von $\mathfrak{F}$. Die Endpunkte einer Seite, welche zweien Rechteckchen gemein ist, erscheinen in den Ausdrücken derselben in entgegengesetzter Aufeinanderfolge. Da δ_r und $a' - a$ einer-, ε_s und $b' - b$ andererseits, und endlich $\delta_r \varepsilon_s$ und $\mathfrak{F}$ das nämliche Zeichen haben, so müssen $a' - a$ und $b' - b$ so bezeichnet sein, dass ihr Product im Zeichen mit $\mathfrak{F}$ übereinstimmt. Dies kann man in der That erreichen, da es freisteht, von den Zahlen a, a' bezw. b, b' a bezw. b die kleinere oder grössere sein zu lassen. Wir können uns in dieser Hinsicht auf die eine Annahme beschränken, dass $\mathfrak{F}$, $a' - a$ und $b' - b$ positiv sind, dass also $a < a'$, $b < b'$ ist, da alle übrigen sich ohne Weiteres darauf zurückführen lassen. Sodann lassen wir sowohl die δ_r, als auch die ε_s unbeschränkt und unbegrenzt abnehmen, wodurch jedes der mn Rechtecke $\delta_r \varepsilon_s$ kleiner werden kann als irgend eine vorgegebene Zahl.

Die vorstehende Zerlegung des Gebietes $\mathfrak{F}$ ist jedoch nicht immer zweckmässig; die wahren Elemente einer Fläche

sind vielmehr die Dreiecke. Wir werden daher manchmal über die Fläche $\mathfrak{F}$ ein System von Dreiecken $\tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_n$ ausbreiten, welche das Gebiet $\mathfrak{F}$ gerade bedecken und dabei in ihrem Zeichen mit $\mathfrak{F}$ übereinstimmen. Es werden also im Allgemeinen einige von ihnen über die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ hinausragen. Ist τ_1 die Dreiecksfläche $M_1\,M_2\,M_3$, so ist τ_2 etwa die Fläche $M_3\,M_2\,M_4$, wobei M_1 und M_4 auf entgegengesetzten Seiten von $M_2\,M_3$ liegen u. s. f. In den Formeln bezeichnen $\tau_1\,\tau_2 \ldots$ stets die Inhalte der bezüglichen Dreiecke. Uebrigens macht es darin gar keinen Unterschied, wenn wir $\tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_n$ irgend welche gewöhnliche[1]) Vielecke bezw. deren Zahlen sein lassen, wenn sie nur das Gebiet $\mathfrak{F}$ ganz überziehen. Wieder brauchen wir sie, sowie die Fläche $\mathfrak{F}$ selbst, nur als positiv vorauszusetzen.

Um zu bewirken, dass ein solches Vieleck τ_r sich nach den beiden Dimensionen der Ebene unbegrenzt verkleinere, lassen wir blos seinen Durchmesser d_r d. h. die grösste unter seinen Sehnen (wozu auch seine Seiten zu rechnen sind) unbegrenzt abnehmen. Dann wird sein Inhalt, den wir ebenfalls mit τ_r bezeichnen, unter jede vorgegebene Zahl δ sinken können. Es ist nämlich stets $\tau_r < d_r^2$. Um dies einzusehen, denke man sich in Fig. 5 $d_r = DD'$ verzeichnet und in den Endpunkten dieser Strecke Senkrechte auf dieselbe errichtet. Alsdann ist klar, dass kein zu τ_r gehöriger Punkt ausserhalb des von ihnen gebildeten Parallelstreifens liegen kann und dass, wenn die von DD' am weitesten entfernten Punkte des Randes von τ_r sich in den Abständen $DE = h$ und $DE' = h'$ zu beiden Seiten von DD'

Fig. 5.



1) Unter einem gewöhnlichen Vielecke verstehen wir eine von einem, aus geraden Strecken bestehenden Rande, der sich selbst nicht schneidet (wohl aber sich selbst berühren kann, wie z. B. das Sechseck $ABCADEFDA$ in Fig. 5*), begrenzte Fläche. Im Folgenden bedeutet „Vieleck", wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, stets ein gewöhnliches Vieleck.

Fig. 5*.

befinden, $h + h' \leqq d_r$ sein muss. Die Fläche τ_r muss also innerhalb des Rechtecks $EE'F'F$ liegen, folglich kleiner als d_r^2 sein. — Demnach erhalten wir $\tau_r < \delta$, wenn wir nur $d_r < \sqrt{\delta}$ machen.

2*. Abschätzung der Summe aller Vierecke τ_r, welche sämmtliche Punkte einer gegebenen gewöhnlichen Linie enthalten.

Im Folgenden werden wir manchmal der Bemerkung bedürfen, dass die gerade erwähnte Summe durch gehörige Verkleinerung der einzelnen Vielecke τ_r beliebig klein werden kann. Um dieselbe ausser Zweifel zu setzen, haben wir für diese Summe eine Grenze aufzustellen, welche von ihr nicht überschritten und dabei selbst beliebig klein gemacht werden kann. Namentlich kommt öfters die Summe aller Vielecke τ_r in Betracht, welche von einem und demselben Rande von $\mathfrak{F}$ durchsetzt sind.

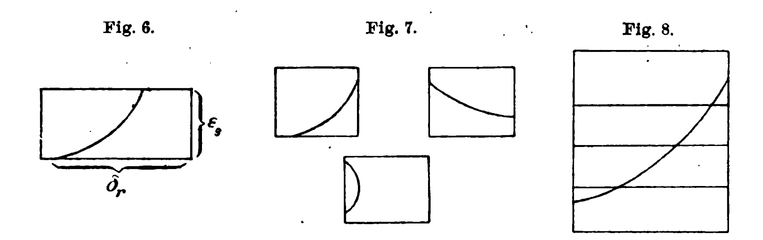
1. Satz.[1] „Benutzen wir die Eingangs der vorigen Nr. erwähnten Systeme von Parallelen zur x- und zur y-Axe, welche das Rechteck $EFE'F'$ (Fig. 4) zwischen den Abscissen a, a' und den Ordinaten b, b' in Rechtecke $\delta_r \varepsilon_s$ theilen, so möge Δ der grösste unter den Theilen δ_r in (3), E der grösste unter den Theilen ε_s in (4) sein. Eine Parallele zur x-Axe möge die gegebene, geschlossene oder offene Linie $\mathfrak{r}$, die das Rechteck $EFE'F'$ nicht verlässt, höchstens in p, eine Parallele zur y-Axe höchstens in q Punkten schneiden. Bedeutet dann Q die Gesammtlänge der Projection von $\mathfrak{r}$ auf die y-Axe (d. i. die Summe der absoluten Längen der Projectionen der einzelnen Stücke von $\mathfrak{r}$, bei deren Durchlaufung sich y stets im nämlichen Sinne ändert), so ist die Summe Σ_1 derjenigen Rechtecke $\delta_r\,\varepsilon_s$, zu denen Punkte von $\mathfrak{r}$ gehören, stets kleiner als $\Delta Q + 2q\mathsf{E}(a' - a)$."

„Dabei ist, da die Strecke zwischen den Punkten B und B' auf der y-Axe durch die Projection von $\mathfrak{r}$ auf diese Axe nicht öfter als p mal bedeckt werden kann, $Q \leqq p\ (b' - b)$."

[1] Picard (Traité d'Analyse I. S. 96) schätzt Σ_1 nach einem ähnlichen Verfahren ab, wobei indess die Länge von $\mathfrak{r}$ benutzt ist. — Vergl. zum 1. Satze einen Nachtrag am Schlusse des Bandes.

„Ist die Linie $\mathfrak{r}$ geschlossen, so sind p und q gerade Zahlen.“

Beweis. Wir addiren zunächst diejenigen Rechtecke $\delta_r \varepsilon_s$ der Summe Σ_1, in welche r den nämlichen Werth hat. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob in einem solchen Rechtecke sich ein Stück der Linie $\mathfrak{r}$ befindet, welches von einer der beiden zur x-Axe parallelen Seiten desselben bis zur andern reicht, oder nicht. Im ersten Falle bemerken wir vor Allem, dass das



bezügliche Rechteck nicht grösser als $\Delta \varepsilon_s$ ist. Hat $\mathfrak{r}$ mit jeder von diesen beiden Seiten nur je einen Punkt gemein (Fig. 6), so ist ε_s gleich der Projection des innerhalb unseres Rechteckes liegenden Stückes von $\mathfrak{r}$ auf die y-Axe; wechselt aber die Ordinate von $\mathfrak{r}$ innerhalb des Rechtecks den Sinn ihrer Aenderung oder hat $\mathfrak{r}$ auch nur mit einer von ihnen mehr als einen Punkt gemein, so ist ε_s kleiner als die Summe der Projectionen der innerhalb des Rechteckes liegenden Stücke von $\mathfrak{r}$, in deren jedem sich y in demselben Sinne ändert, auf die y-Axe. Die Summe aller dieser Rechtecke übersteigt ΔQ_r nicht, worin Q_r die Summe der Projectionen aller in dem Streifen, welcher von den Geraden $x = a_{r-1}$ und $x = a_r$ gebildet wird, befindlichen Stücke von $\mathfrak{r}$ bedeutet.

Im zweiten Falle befinden sich innerhalb des Rechteckes ein oder mehrere Stücke von $\mathfrak{r}$, wovon keines mit beiden zur x-Axe parallelen Seiten je einen Punkt gemein hat. Ein solches Stück schneidet daher entweder zwei andere Seiten des Rechteckes je in einem Punkte oder eine Seite desselben in zwei Punkten. Das erstere Vorkommniss wird durch die in der oberen Reihe von Fig. 7 befindlichen Rechtecke, das letztere durch das in der unteren Reihe dargestellt.

Um die Anzahl dieser Rechtecke abzuschätzen, nehmen wir an, dass der Streifen zwischen den Parallelen zur y-Axe $x = a_{r-1}$ und $x = a_r$ g Stücke von $\mathfrak{r}$, welche jede von ihnen je einmal schneiden, h Stücke, welche blos die erstere und i Stücke, welche blos die letztere und zwar immer in je zwei Punkten schneiden, enthält. Da zu jedem solchen Stücke von $\mathfrak{r}$ zwei Rechtecke der in Rede stehenden Art gehören können (vgl. Fig. 8), so giebt es davon im genannten Streifen höchstens $2(g+h+i)$. Die Gerade $x = a_{r-1}$ hat mit $\mathfrak{r}$ $g+2h$, die Gerade $x = a_r$ $g+2i$ Punkte gemein. Es ist aber $g+2i \leqq q$ und $g+2h \leqq q$; folglich $2(g+h+i) \leqq 2q$. Die Summe aller Rechtecke der zweiten Art kann daher $2q\mathsf{E}\delta_r$ nicht überschreiten. Somit ergiebt sich als eine obere Grenze für die Summe aller über δ_r stehenden Rechtecke der Summe Σ_1

$$\Delta Q_r + 2q\mathsf{E}\delta_r.$$

Lassen wir hier r von 1 bis m gehen und zählen zusammen, so ergiebt sich aus dem ersten Gliede ΔQ, aus dem zweiten $2q\mathsf{E}(a'-a)$. Wir finden demnach schliesslich

$$\Sigma_1 < \Delta Q + 2q\mathsf{E}(a'-a). \tag{7}$$

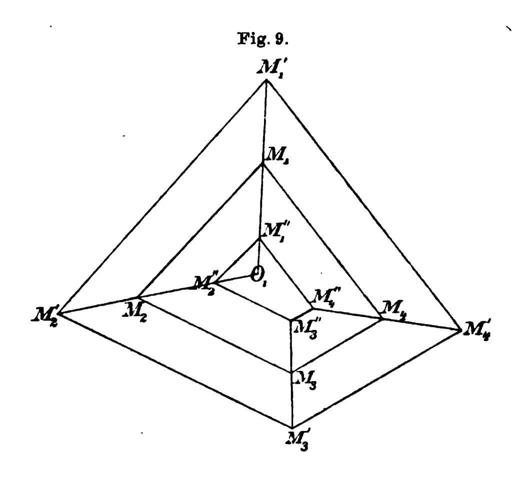
Zusatz. Besteht die Linie $\mathfrak{r}$ nur aus Strecken, die zu einer der Axen parallel sind, so kann man, wie durch eine Betrachtung, ähnlich der beim 2. Satze angestellten, sich ergiebt, den Ausdruck (7) durch einen etwas kleineren ersetzen. Ist z. B. $\mathfrak{r}$ das in Fig. 1 auf S. 12 gezeichnete Rechteck $ABA'B'$, so ist natürlich

$$\Sigma_1 \leqq 2\Delta(b'-b) + 2\mathsf{E}(a'-a) + 4\Delta\mathsf{E}.$$

2. Satz. „Wenn man zu jeder Seite eines gewöhnlichen ebenen Vielecks $M_1 M_2 \ldots M_k$ mit dem Umfange P sowohl ausserhalb, als auch innerhalb des Vielecks im nämlichen nicht zu grossen Abstande H eine Parallele zieht (Fig. 9), so bilden die Schnittpunkte je zweier auf einander folgenden äusseren Parallelen das Vieleck $M_1' M_2' \ldots M_k'$, die Schnittpunkte je zweier auf einander folgenden inneren Parallelen das Vieleck $M_1'' M_2'' \ldots M_k''$. Der von den Umfängen dieser beiden Vielecke eingeschlossene Ring hat den Inhalt $2HP$.“

Beweis. M_r' und M_r'' liegen beide auf der Halbirungslinie des Winkels $M_{r-1} M_r M_{r+1}$ $(r = 1, 2 \ldots k)$. Das Trapez $M_1' M_2' M_2'' M_1''$ hat den Inhalt $2H \times M_1 M_2$; denn seine Höhe ist $2H$ und es ist $\frac{1}{2}(M_1' M_2' + M_1'' M_2'') = M_1 M_2$. Da Aehnliches auch von den um die übrigen $k - 1$ Seiten des gegebenen Vieleckes gelagerten Trapeze $M_2' M_3' M_3'' M_2''$

Fig. 9.



u. s. w. gilt, so ergiebt sich für den ganzen Ring der Inhalt $2HP$. Diese Formel gilt zwar allgemein, wie auch die Punkte M_r' und M_r'' liegen mögen, allein für uns hat sie nur Bedeutung, wenn die geschlossenen Linien $M_1' \ldots M_k' M_1'$ und $M_1'' \ldots M_k'' M_1''$ sich selbst nicht schneiden und dabei die erstere ausserhalb, die letztere innerhalb des gegebenen Vielecks befindet. Wenn dasselbe convex ist, so ist das Vieleck $M_1' \ldots M_k'$ ebenfalls convex, wie gross auch H sein mag. Dagegen darf, wenn die Linie $M_1'' M_2'' \ldots M_k'' M_1''$ einfach ausfallen soll, H nicht grösser sein als der Abstand des Punktes O_r $(r = 1, 2 \ldots k)$, wo die Halbirungslinie des Vieleckswinkels M_r von der des nächsten M_{r+1} geschnitten wird, von der Seite $M_r M_{r+1}$, wobei natürlich nur diejenigen unter den Punkten $O_1 O_2 \ldots O_k$ berücksichtigt zu werden brauchen, welche nicht ausserhalb des vorgelegten Vielecks liegen. Hat das Vieleck $M_1 M_2 \ldots M_k$ auch erhabene Winkel, so ist H auch mit Rücksicht auf den äusseren Rahmen zu

beschränken, und zwar darf H nicht grösser sein als die kleinste unter den Abständen der ausserhalb des Vielecks $M_1 \dots M_k$ liegenden Punkte O_r von den entsprechenden Seiten $M_r M_{r+1}$.

Ist $k = 4$ und $M_1 M_2 M_3 M_4$ ein Rechteck mit den Seiten $M_1 M_2 = A$, $M_2 M_3 = B$, so kann man den 2. Satz auch durch die Bemerkung, dass der in Rede stehende Rahmen den Inhalt

$$(A + 2H)(B + 2H) - (A - 2H)(B + 2H) = 4(A + B)H \tag{8}$$

hat, beweisen.

Für den aus den Strecken $M_1 M_2$, $M_2 M_3 \dots M_{k-1} M_k$ bestehenden nicht geschlossenen Zug erhält man auf ähnliche Weise, wie beim obigen Vieleck, einen von ihm durchsetzten Ring, wenn man noch in den Endpunkten M_1 und M_k Senkrechte auf die Seiten $M_1 M_2$ und $M_{k-1} M_k$ errichtet und die erstere soweit verlängert, bis sie die beiden Parallelen zu $M_1 M_2$, die letztere soweit, bis sie die beiden Parallelen zu $M_{k-1} M_k$ trifft.

Hieraus folgt unmittelbar der folgende

3. Satz. „Vorausgesetzt, das gewöhnliche Vieleck $M_1 M_2 \dots M_k$ sei mit einem System von Vielecken $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$ gerade bedeckt, so lässt sich der grösste unter den Durchmessern derselben, D, so klein annehmen, dass die Summe aller jener unter den τ_r befindlichen Vielecken, welche mindestens einen Punkt mit dem Umfange P des gegebenen Vielecks gemein haben, nicht grösser ist als $2DP$."

Wenn wir nämlich den oben beschriebenen Ring von der Breite $2H$ construiren, so kann kein Vieleck vom Durchmesser H, welches mit P mindestens einen Punkt N gemein hat, über ihn hinausragen. Denn hätte es einen Punkt N' ausserhalb jenes Ringes, so wäre $|NN'| > H$ gegen die Voraussetzung. Man braucht somit nur $D \leqq H$ anzunehmen.

3. Das obere und untere Doppelintegral. Das eigentliche Doppelintegral.[1])

1) Vgl. J. Thomae Bestimmte Integrale § 50, Zeitschr. f. Math. u. Ph. 21. B. S. 225, P. du Bois-Reymond Journal f. r. u. ang. Math.

Um das eigentliche Doppelintegral einzuführen, bedarf es wohl nicht mehr der Anknüpfung an eine geometrische Aufgabe[1]), wie wir das beim einfachen Integral für zweckmässig erachtet haben (X. 1). Es scheint vielmehr hier naheliegend genug zu sein, den grundlegenden Satz (S) auf S. 351 d. I. T. aus der Lehre von den einfachen Integralen auf eine Function von zwei Veränderlichen zu übertragen.

Satz. „In jedem Punkte des im Endlichen gelegenen Gebietes $\mathfrak{F}$ mit gewöhnlichen (S. 37) Rändern sei eine reelle Function $f(x, y)$ eindeutig definirt und dabei in demselben endlich, d. h. es giebt zwei Zahlen A und B derart, dass, mag x, y was immer für ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ sein,

$$A < f(x, y) < B \tag{1}$$

ist. Über das Gebiet $\mathfrak{F}$ wird ein System von mit $\mathfrak{F}$ gleichbezeichneten gewöhnlichen Vielecken[2]) mit den Zahlen $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ in der Weise ausgebreitet, dass sie es gerade bedecken, wobei einige von ihnen über $\mathfrak{F}$ hinausragen dürfen; es müssen demnach zu jedem Vielecke τ_r Punkte von $\mathfrak{F}$ und jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ muss mindestens zu einem τ_r gehören. Die Anzahl n dieser Vielecke ist willkürlich. Beschreibt der Punkt x, y das

---

94. B. S 277, A. Harnack Elem. d. Diff.- u. Int.-Rechn. S. 310, C. Jordan C. d'Analyse 2. éd. I. S. 33, f. II. S. 76. Das obere und untere Integral heissen bei Jordan l'intégrale par excess und l'int. par défaut.

1) Es ist ganz verkehrt, aus der à priori gesetzten Volumzahl die analytische Existenz des Doppelintegrals ableiten zu wollen. Vielmehr muss umgekehrt die Volumzahl durch ein doppeltes oder dreifaches Integral erklärt werden.

2) Da die völlig erschöpfende Erklärung der Flächenzahl (s. S. 60) sich nicht durch wesentlich einfachere Betrachtungen begründen lässt, als der Satz i. T., so haben wir sie als besonderen Fall desselben behandelt und uns daher bei seiner Formulirung auf geradlinig-begrenzte Theile des Integrationsgebietes beschränken müssen. Aber auch nach Erledigung der Flächenzahl macht die Ausdehnung dieses Satzes auf beliebig-begrenzte Theile des Integrationsgebietes Schwierigkeiten wegen der Abschätzung der Summe von jenen unter ihnen, welche mit dem nämlichen Rande desselben mindestens je einen Punkt gemein haben.

Vieleck τ_r $(r = 1, 2 \dots n)$ mit Einschluss seines Umfanges, so seien g_r k_r bezw. die obere und untere Grenze von $f(x, y)$.

1) Dann hat die Summe $\sum_1^n g_r \tau_r$ bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme eines jeden Vieleckes τ_r nach den beiden Dimensionen der Ebene einen endlichen Grenzwerth G, d. h. jedem $\varkappa > 0$ entspricht ein $\lambda > 0$ so, dass

$$\left| \sum_1^n g_r \tau_r - G \right| < \varkappa \tag{2}$$

ist, wenn nur der Durchmesser D_r eines jeden der Vielecke τ_r $(r = 1, 2 \dots n)$ kleiner ist als λ. Diese Thatsache wird kurz durch die Formel

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n g_r \tau_r = G \tag{I}$$

angedeutet." — Unter den nämlichen Umständen hat die Summe $\sum_1^n k_r \tau_r$ einen endlichen Grenzwerth K und zwar ist $K \leqq G$."

2) „Bedeuten $\tau_1' \dots \tau_n'{}'$ unter den Vielecken $\tau_1 \dots \tau_n$ diejenigen, zu welchen nur Punkte von $\mathfrak{J}$ gehören, welche also entweder völlig innerhalb $\mathfrak{J}$ liegen oder bis an die Begrenzung von $\mathfrak{J}$ reichen, und g_r' k_r' obere und untere Grenze von $f(x, y)$ für die Punkte von τ_r', so bestehen auch die Formeln

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n'} g_r' \tau_r' = G \qquad \lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n'} k_r' \tau_r' = K. \tag{II}$$

D. h. es ist z. B.

$$\left| \sum_1^{n'} g_r' \tau_r' - G \right| < \varkappa,$$

wenn nur $D_r < \lambda'$ $(r = 1, 2 \dots n)$ ist. Auch jetzt müssen nämlich die Durchmesser aller Vielecke $\tau_1 \dots \tau_n$ unabhängig von einander zur Null convergiren; denn würde man das nicht festsetzen, so könnten diejenigen von den Vielecken τ_r, zu welchen sowohl Punkte von $\mathfrak{J}$, als auch andere Punkte der Ebene gehören, unverändert bleiben."

Der Grenzwerth G heisst nach Volterra und Pasch (s. Nachtrag II. 1) das obere Doppelintegral der Func-

tion $f(x,y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ und erhält nach C. Jordan das Zeichen

$$\mathsf{S}^{(1)}_{(\mathfrak{F})} f(x,y)\, dA \quad \text{oder} \quad \mathsf{S}^{1}_{\mathfrak{F}} f(x,y)\, dA,$$

worin S, wie das $\int$ beim einfachen Integral, daran erinnern soll, dass an einer Summe ein Grenzübergang zu vollziehen ist. dA vertritt das Zeichen τ_r, bedeutet also die Zahl eines gewöhnlichen Vielecks, dessen Durchmesser D_r man sich beliebig klein denken darf; dA kann somit selbst beliebig klein sein und daher als Differenzial der Vieleckszahl A, diese als unabhängige Veränderliche betrachtet, angesehen werden (vgl. I. T. S. 29). Da indess $\sum\limits_{1}^{n} g_r \tau_r$, was immer die $\tau_1 \ldots \tau_n$ auch für Vielecke sein mögen, wenn nur der Durchmesser eines jeden einzelnen ins Unendliche abnimmt, stets denselben Grenzwerth G hat, so kann man sie insbesondere Rechtecke, deren Seiten parallel zu den Coordinatenaxen sind, sein lassen und demgemäss $dA = dx\,dy$ setzen, wobei dx für δ_r, dy für ε_s auf S. 39 steht. Denkt man sich aber die τ_r als Dreiecke, so nimmt man als dA das Dreieck der Punkte x, y; $x + dx$, $y + dy$; $x + (dx)'$, $y + (dy)'$ und setzt daher

$$dA = \frac{\iota}{2}[dx\,(dy)' - dy\,(dx)'],$$

wo $\iota = +1$ oder -1 ist, je nachdem $\widehat{xy} = +\pi:2$ oder $-\pi:2$ ist.

K heisst das untere Doppelintegral der Function $f(x,y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ und erhält das Zeichen

$$\mathsf{S}^{(2)}_{(\mathfrak{F})} f(x,y)\, dA.$$

Wenn $G = K$ ist, so heisst der gemeinsame Werth beider Zahlen das eigentliche zweifache oder Doppelintegral der Function $f(x,y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ und wird dargestellt durch das Zeichen $\mathsf{S}_{(\mathfrak{F})} f(x,y)\, dA$ (oder einfacher $\mathsf{S}_{\mathfrak{F}} f(x,y)\, dA$), wofür man gewöhnlich, als Vielecke τ_r blos Rechtecke, deren Seiten zu den Coordinatenaxen parallel sind, benutzend, schreibt (vgl. S. 68)

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x,y)\, dx\, dy.$$

NB. Rein analytisch werden das obere und untere Doppelintegral erklärt, indem man in den Formeln (I) und (II) die τ_r (und τ_r') blos die Producte $\delta_r \varepsilon_s$ auf S. 39 und entsprechend $g_r k_r$ obere und untere Grenze von $f(x, y)$ im Bereiche der Punkte x, y, wofür

$$a_{r-1} \leqq x \leqq a_r \qquad b_{s-1} \leqq y \leqq b_s$$

ist, sein lässt. Ordnet man hierauf jedem solchen Bereiche die bezügliche Zahl $\delta_r \varepsilon_s$ zu, so gelangt man mittelst des Doppelintegrals (31) auf S. 60 zu den Zahlen der übrigen Vielecke und kann alsdann für G und K neuerdings die Formeln (I) und (II) in dem Sinne aufstellen, dass die τ_r die Zahlen irgend welcher Vielecke bedeuten. Die für die Vielecke auf die soeben erwähnte Art gewonnenen Zahlen stimmen mit den dafür von der Euklid'schen Planimetrie gegebenen überein. Setzt man dieselbe als bekannt voraus, so können die τ_r von vornherein irgend welche Vielecke sein.

Zunächst haben wir die folgenden Bemerkungen zu machen.

1) Bedeutet $\mathfrak{F}'$ irgend ein Gebiet, welches in $\mathfrak{F}$ enthalten ist, oder dieses selbst, und g', k' bezw. die obere und untere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ für das Gebiet $\mathfrak{F}'$, so hat man

$$A < g' \leqq B \qquad A \leqq k' < B. \tag{3}$$

In der That, da $f(x, y) \leqq g'$ ist, so hat man nach (1) $A < g'$. Es giebt aber zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ einen Punkt x_1, y_1 in $\mathfrak{F}'$, der Art, dass $f(x_1, y_1) > g' - \varepsilon$ ist. Also ist $B > g' - \varepsilon$ oder $\varepsilon > g' - B$, somit ist $g' \leqq B$.

Auf ähnliche Art zeigt man das zweite Paar der Ungleichungen (3).

2) Ist das Gebiet $\mathfrak{F}'$ ein Theil von $\mathfrak{F}$ und bedeuten g, k obere und untere Grenzen der Werthe von $f(x, y)$ für das Gebiet $\mathfrak{F}$, so hat man

$$g' \leqq g \qquad k' \geqq k. \tag{4}$$

Denn es ist im Gebiete $\mathfrak{F}'$ sicher

$$k \leqq f(x, y) \leqq g,$$

woraus nach der ersten Bemerkung sofort die Beziehungen (4) sich ergeben.

3) Aus 2) folgt weiter, dass wenn wir ein Vieleck τ_r, das Punkte von $\mathfrak{F}$ enthält, durch gerade Linien in Theile $\tau_{r,k}$ zerlegen, deren jeder ebenfalls mindestens einen Punkt von $\mathfrak{F}$ enthält, und unter $g_{r,k}$ $(k_{r,k})$ die obere (untere) Grenze der Werthe von $f(x, y)$ in den zu $\tau_{r,k}$ gehörigen Punkten von $\mathfrak{F}$

verstehen, alsdann die Summe der diesen Theilen entsprechenden Glieder $g_{r,k}\tau_{r,k}$ ($k_{r,k}\tau_{r,k}$) nicht grösser (kleiner) sein kann, als $g_r\tau_r$ ($k_r\tau_r$) (vgl. S. 354 d. I. T.). Dabei setzen wir die Fläche $\mathfrak{F}$ und die Vielecke τ_r, wie auch im Folgenden, als positiv voraus.

Nun gehen wir zum Beweise des ersten Theiles des obigen Satzes über. Wir brauchen hierbei nicht einmal anzunehmen, dass das Gebiet $\mathfrak{F}$ gewöhnliche Ränder besitzt. Ja wir können dasselbe durch irgend ein beliebiges System von Punkten x, y, deren Coordinaten zwischen den nämlichen endlichen Zahlen liegen, ersetzen, in welchem Falle die $\tau_1 \ldots \tau_n$ diejenigen Vielecke wären, zu welchen solche Punkte gehören.[1]) Wir brauchen nur die Formel (I) d. i.

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^n {}_r\, g_r\tau_r = G \qquad (5)$$

zu zeigen, da die zweite

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^n {}_r\, k_r\tau_r = K \qquad (6)$$

daraus sich ergiebt, indem wir anstatt $f(x, y)$ die Function $-f(x, y)$ betrachten, wobei nur an Stelle von g_r $-k_r$ tritt.[2]) Aus (5) und (6) folgt, da $g_r \geqq k_r$ $(r = 1, 2 \ldots n)$, also

$$\sum_1^n {}_r\, g_r\tau_r \geqq \sum_1^n {}_r\, k_r\tau_r$$

ist, dann noch, dass $G \geqq K$ ist.

Beim Beweise der Formel (5) müssen wir aber zwei Fälle unterscheiden.

---

1) Dies wurde zuerst vom Verfasser bemerkt und durchgeführt. Vgl. Sitz. B. d. Wiener Acad. math. naturw. Cl. Bd. 106 S. 453.

2) Dem Begriffe der unteren Grenze zufolge hat man für jeden Punkt x, y in τ_r $f(x, y) \geqq k_r$, dagegen bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ mindestens für einen Punkt x', y' in τ_r $f(x', y') < k_r + \varepsilon$. Demnach ist

$$-k_r \geqq -f(x, y) \qquad -k_r - \varepsilon < -f(x', y')$$

d. h. $-k_r$ ist die obere Grenze der Werthe von $-f(x, y)$ im Gebiete τ_r.

1. Fall. $f(x, y)$ nimmt im Gebiete $\mathfrak{F}$ negative Werthe nicht an; es ist also $f(x, y) \geqq 0$, somit $g_r \geqq 0$ und

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r \geqq 0. \tag{7}$$

Jetzt ist auch $B > 0$. Der Beweis unseres Satzes verläuft dann ähnlich wie der des Satzes (S) auf S. 351 d. I. T.[1]) Wir betrachten also zunächst nur eine unbegrenzte Reihe $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_m \ldots$ solcher Systeme von Vielecken, dass der Durchmesser eines jeden zum Systeme $\mathfrak{T}_m$ gehörigen Vielecks $\tau_{m,u}$ kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl λ ausfällt, wenn nur m gross genug gewählt wird, und dabei keines von ihnen in zwei benachbarten, dem Systeme $\mathfrak{T}_{m-1}$ angehörigen Vielecken liegt. Solche Systeme erhalten wir z. B., indem wir die Strecken $a' - a$ und $b' - b$ (vgl. S. 39) in je $10, 10^2 \ldots 10^m$ gleiche Theile zerlegen und durch die Theilpunkte die Parallelen zu den beiden Coordinatenaxen ziehen. Von den zu $\mathfrak{T}_m$ gehörigen Vielecken sind zunächst alle in Betracht zu ziehen, welche überhaupt Punkte von $\mathfrak{F}$ enthalten. Wir bezeichnen sie mit

$$\tau_{m1} \tau_{m2} \ldots \tau_{m, n_m}, \tag{7*}$$

ferner die obere Grenze von $f(x, y)$ im Vielecke $\tau_{m,u}$ mit $g_{m,u}$ und setzen

$$\sum_1^{n_m} {}_u\, g_{m,u} \tau_{m,u} = \sum\nolimits_m .$$

Beim Uebergange von dem Systeme $\mathfrak{T}_m$ zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ zerfällt jedes Vieleck $\tau_{m,u}$ in mehrere Theile, von denen jene, zu welchen keine Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören, in das System $\mathfrak{T}_{m+1}$ nicht aufzunehmen sind. Da $g_{m,u} \geqq 0$ ist, so wird $\sum_m$ bei Weglassung der diesen Theilen $\tau_{m+1,u}$ der $\tau_{m,u}$ entsprechenden Producte $g_{m,u} \tau_{m+1,u}$ nicht vergrössert. Der Rest ist

1) Wir haben daran nur eine kleine Aenderung angebracht. Ihr entsprechend hätten wir a. a. O. S. 355 an Stelle von $\delta : k\ D_m$, die grösste unter den Strecken $\delta_{m,u}$, welche indess bereits kleiner als δ sein soll, zu setzen.

zufolge der dritten der obigen Bemerkungen nicht kleiner als $\sum_{m+1}$. Wir gelangen demnach zur Beziehung

$$\sum_m \geqq \sum_{m+1}.$$

$\sum_m$ nimmt also mit wachsendem m nicht zu und hat daher bei $\lim m = +\infty$ einen Grenzwerth und zwar, weil $\sum_m$ nach (7) nicht negativ werden kann, einen nicht negativen endlichen, den wir mit G bezeichnen wollen. Dabei ist

$$\sum_m \geqq G \left(= \lim_{m=+\infty} \sum_m\right). \tag{8}$$

Somit lässt sich jedem $\varkappa > 0$ ein $\mu > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $m > \mu$ ist,

$$0 \leqq \sum_m - G < \tfrac{1}{2}\varkappa \quad \text{oder} \quad \sum_m < G + \tfrac{1}{2}\varkappa \tag{9}$$

ist.

Wir können ferner zeigen, dass wie immer auch die Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ gewählt werden mögen,

$$(S =) \sum_1^n g_r \tau_r \geqq G \tag{10}$$

ist. Aus den Beziehungen (9) und (10) ist dann zu entnehmen, dass G die untere Grenze ist für alle Werthe, welche $\sum_1^n g_r \tau_r$ überhaupt d. i. bei jeder zulässigen Wahl der Vielecke $\tau_1 \tau_2 \ldots$ (wobei natürlich auch ihre Anzahl beliebig gross sein darf) annehmen kann. — Um nun die Ungleichung (10) zu erweisen, bemerken wir, dass nach (8)

$$G - S \leqq \sum_m - S \tag{11}$$

ist, und zeigen, dass sich jeder positiven Zahl ε ganze Zahlen m so zuordnen lassen, dass

$$\sum_m - S < \varepsilon \tag{12}$$

ist. Also hat man nach (11) $G - S < \varepsilon$ und daher in der That $G \leqq S$.

Mehr Umstände verursacht aber der Beweis der in der Formel (12) liegenden Behauptung. Wir denken uns in der xy-Ebene die gegebenen Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ gezeichnet und darüber die Schaar $\mathfrak{T}_m$ von Vielecken $\tau_{m,u}$, wobei m zunächst nur so gross sein soll, dass jedes $\tau_{m,u}$ kleiner ist als das kleinste unter den $\tau_1 \ldots \tau_n$. Es kann also kein τ_r ganz in einem der $\tau_{m,u}$ liegen. Unter den in $\sum_m$ erscheinenden Vielecken $\tau_{m,u}$ d. i. den (7*) giebt es keines, das nicht mindestens einen Punkt mit einem oder mehreren τ_r gemein hätte, weil sonst nicht jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ wenigstens zu einem τ_r gehören würde. Daher zerfallen diese Vielecke (7*) in zwei Klassen und zwar 1) solche, welche ganz in je einem τ_r liegen, 2) solche, welche mit zwei oder mehreren τ_r je ein Flächenstück gemein haben. Die Summe der den $\tau_{m,u}$ dieser beiden Klassen entsprechenden Glieder von $\sum_m$ seien bezw. mit $\sum'_m$, $\sum''_m$ bezeichnet, so dass

$$\sum_m = \sum'_m + \sum''_m \tag{13}$$

ist. Da nach (1) $g_{m,u} \leqq B$ ist, so hat man

$$\sum''_m \leqq B \sum'' \tau_{m,u}, \tag{14}$$

wo die Summe $\sum''$ sich eben auf alle Vielecke der 2. Klasse erstreckt. Fassen wir zunächst alle jene unter ihnen, welche mit dem Umfange (P_r) eines und desselben τ_r mindestens je einen Punkt gemein haben, ins Auge. Man kann nach dem 3. Satze auf S. 46 eine solche Länge K_r angeben, dass, wenn der grösste unter den Durchmessern der soeben genannten Vielecke $\tau_{m,u}$ (er sei $\Delta_{m,r}$) K_r nicht überschreitet, alsdann ihre Summe nicht grösser als $2\,\Delta_{m,r}\,P_r$ ist. Wenn dann der grösste unter den Durchmessern aller der Schaar $\mathfrak{T}_m$ angehörigen Vielecke $\tau_{m,u}$ überhaupt, Δ_m, höchstens die kleinste der Längen $K_1 \ldots K_n$ erreicht, so geht diese Summe nicht über $2\,\Delta_m\,P_r$ hinaus. Lassen wir hier r nach einander die Nummern $1, 2 \ldots n$ durchlaufen und addiren die bezüglichen Ungleichungen, so finden wir, dass sicherlich

$$\sum'' \tau_{m,u} \leqq 2\,\Delta_m \sum_1^n P_r \tag{15}$$

ist. Mithin haben wir

$$\sum\nolimits_m'' \leqq 2B\Delta_m \sum_1^n{}_r P_r. \tag{16}$$

Aus den Formeln (13) und (16) ergiebt sich endlich, dass

$$\sum\nolimits_m \leqq \sum\nolimits_m' + 2B\Delta_m \sum_1^n{}_r P_r \tag{17}$$

ist.

In der Summe S ersetzen wir jedes τ_r durch die Summe der Theile, in welche es durch die Einzeichnung der $\tau_{m,u}$ in die mit den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ bereits bedeckte Ebene zerfällt, und lösen die Producte $g_r \tau_r$ auf. Die so aus S erhaltenen Glieder theilen wir ebenfalls in zwei Gruppen. Die erste bestehe aus jenen darunter, deren zweiter Factor der Inhalt eines $\tau_{m,u}$ der ersten von den obigen beiden Klassen ist, also eines solchen, das ganz in einem τ_r liegt, die zweite wird von allen übrigen Gliedern gebildet. Bezeichnen wir die Summe der in die erste Gruppe eingereihten Glieder mit S', die der in die zweite eingereihten mit S'', so ist

$$S = S' + S''. \tag{18}$$

Da hier $g_r \geqq 0$, somit $S'' \geqq 0$ ist, so haben wir nach (18)

$$S \geqq S'. \tag{19}$$

Aus (17) und (19) folgt dann, dass

$$\sum\nolimits_m - S \leqq \left(\sum\nolimits_m' - S'\right) + 2B\Delta_m \sum_1^n{}_r P_r \tag{20}$$

ist. $\sum_m' - S'$ kann, da zwischen den Coefficienten der das nämliche Vieleck $\tau_{m,u}$ enthaltenden Glieder von $\sum_m'$ und S' die Beziehung: $g_{m,u} \leqq g_r$ besteht, nicht positiv sein, d. h. es ist $\sum_m' - S' \leqq 0$. Wir gewinnen demnach aus (20) die Formel

$$\sum\nolimits_m - S \leqq 2B\Delta_m \sum_1^n{}_r P_r. \tag{21}$$

Da es nun freisteht, m noch soweit zu vergrössern, dass

$$\Delta_m < \varepsilon : 2B \sum_1^n{}_r P_r$$

ist, so ergiebt sich aus (21) unmittelbar die Beziehung (12).

Die Ungleichung (21) reicht übrigens zum Beweise der Formel (5) in dem von uns betrachteten Falle aus. Wir haben nämlich zu zeigen, dass jedem $\varkappa > 0$ ein $\lambda > 0$ sich

so zuordnen lässt, dass wenn nur der Durchmesser eines jeden Vieleckes τ_r kleiner als λ ist,

$$0 \leqq \sum_1^n {}_r g_r \tau_r - G < \varkappa \tag{22}$$

ist. Wir setzen

$$\sum_1^n {}_r g_r \tau_r - G = \left(\sum\nolimits_m - G\right) + \left(\sum_1^n {}_r g_r \tau_r - \sum\nolimits_m\right) \tag{23}$$

und geben m einen so grossen Werth, dass für die erste Differenz die Ungleichung (9) besteht. Um für die Differenz

$$\sum {}_r g_r \tau_r - \sum\nolimits_m$$

eine obere Grenze zu erhalten, brauchen wir blos in dem Vorstehenden das System (7*) mit dem System $\tau_1 \ldots \tau_n$ zu vertauschen. Bedeutet alsdann D den grössten unter den Durchmessern der Vielecke τ_r, der von vornherein nicht grösser als irgend eine der Längen $K_{m,1} \ldots K_{m,n_m}$, welche wie oben die K_r zu bestimmen sind, angenommen werden darf, und $P_{m,u}$ der Umfang des Vieleckes $\tau_{m,u}$, so folgt aus (21), dass

$$\sum_1^n {}_r g_r \tau_r - \sum\nolimits_m \leqq 2BD \sum_1^{n_m} {}_u P_{m,u} \tag{24}$$

ist. Lassen wir nun

$$D < \varkappa : 4B \sum_1^{n_m} {}_u P_{m,u} \tag{25}$$

sein, so ist nach (24)

$$\sum_1^n {}_r g_r \tau_r - \sum\nolimits_m < \varkappa : 2.$$

Mithin haben wir nach (23) zufolge der Ungleichungen (9) und (10)

$$0 \leqq \sum_1^n {}_r g_r \tau_r - G < \varkappa,$$

wenn nur D kleiner ist als die rechte Seite der Beziehung (25).

Bevor wir zum zweiten Falle übergehen, müssen wir das für den ersten erlangte Ergebniss auf die unter demselben

enthaltene Function $f(x, y) = 1$ anwenden. Nunmehr ist $g_r = k_r = 1$ für jeden Werth von r. Wir gelangen somit zum Satze, dass $\sum_1^n \tau_r$, wenn wir jedes τ_r in der bekannten Weise zur Null convergiren lassen, einen endlichen Grenzwerth hat, den wir mit A bezeichnen wollen. Demnach sei

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n \tau_r = \mathsf{A}. \tag{26}$$

Dabei ist nach (10)

$$\sum_1^n \tau_r \geqq \mathsf{A}, \tag{27}$$

Andererseits hat man nach (2) bei gehöriger Kleinheit der τ_r

$$\sum \tau_r < \mathsf{A} + \varkappa, \tag{27*}$$

woraus folgt, dass A nicht negativ sein kann. Denn wäre $\mathsf{A} < 0$, so gäbe es positive Zahlen $\varkappa$, so dass $\mathsf{A} + \varkappa < 0$ ist. Somit wäre $\sum \tau_r < 0$, was nicht sein kann. — Wenn $\mathfrak{F}$ eine Fläche mit gewöhnlichen Rändern ist, so ist A positiv. Denn wäre $\mathsf{A} = 0$, so könnte die Summe $\sum \tau_r$ zufolge (27*) kleiner als eine beliebige Zahl $\varkappa$ sein. Das ist jedoch nicht möglich, es ist vielmehr eine jede Summe $\sum \tau_r$ ihrer Erklärung nach grösser als der Inhalt irgend eines Vielecks, das vollständig innerhalb $\mathfrak{F}$ liegt.

2. Fall. $f(x, y)$ nimmt im Gebiete $\mathfrak{F}$ negative Werthe an. Daneben kommen entweder positive Werthe nicht vor oder es kommen auch solche vor. — Bedeutet k die endliche untere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ für dieses Gebiet, so ist $f(x, y) \geqq k$ d. i. $f(x, y) - k \geqq 0$. Für die Function $f(x, y) - k$ ist die obere Grenze im Vielecke τ_r $g_r - k$, es hat also

$$\sum_1^n (g_r - k)\tau_r$$

nach dem für den 1. Fall Bemerkten bei $\lim \tau_r = 0$ einen endlichen Grenzwerth $G_0 \geqq 0$. Wir haben aber

$$g_r = (g_r - k) + k$$

$$\sum_1^n {}^r g_r \tau_r = \sum_1^n {}^r (g_r - k)\tau_r + k\sum_1^n {}^r \tau_r,$$

mithin [nach (26)]

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n {}^r g_r \tau_r = G_0 + k\mathsf{A}.$$

Damit ist der erste Theil des Satzes in Nr. 3 auch in diesem Falle erwiesen.[1])

4. Fortsetzung.

Ganz in der nämlichen Weise lässt sich zeigen, dass auch jede von den Summen in (II) auf S. 48

$$\sum_1^{n'} {}^r g_r' \tau_r' \qquad \sum_1^{n'} {}^r k_r' \tau_r' \tag{28}$$

bei $\lim \tau_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ einen endlichen Grenzwerth besitzt. Dieselben seien bezw. mit G', K' bezeichnet.[2]) Um G' mit G (bezw. K' mit K) zu vergleichen, scheiden wir aus den Vielecken τ_r diejenigen aus, welche sowohl Punkte von $\mathfrak{F}$, als auch nicht dazu gehörige enthalten, $\tau_1'' \ldots \tau_{n''}''$. Bedeutet dann g_r'' die obere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ für die in τ_r'' befindlichen Punkte von $\mathfrak{F}$, so ist natürlich

$$\sum_1^n {}^r g_r \tau_r - \sum_1^{n'} {}^r g_r' \tau_r' = \sum_1^{n''} {}^r g_r'' \tau_r''. \tag{29}$$

---

1) In diesem zweiten Falle ist G nicht die untere Grenze für alle denkbaren Werthe von $\sum_1^n {}^r g_r \tau_r$ und zwar selbst dann nicht, wenn wir den τ_r die weitere Bedingung auferlegen, ein das Gebiet $\mathfrak{F}$ einschliessendes Vieleck mit dem Inhalte $\mathfrak{B}$ nicht zu überschreiten. Dies zeigt schon das Beispiel $f(x, y) = -1$. Untere Grenze für $-\sum_1^n {}^r \tau_r$ ist nämlich unter dieser Voraussetzung $-\mathfrak{B}$, nicht $-\mathsf{A}$. — Auf den Fall, dass $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ positive Werthe nicht annimmt, durch die Ersetzung von $f(x, y)$ durch $-f(x, y)$ übertragen, giebt die Erörterung unter 1) auf S. 52 den Satz, dass die obere Grenze von $\sum k_r \tau_r$ das untere Doppelintegral von $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ bildet.

2) Bleibt man bei den in Nr. 3 unterschiedenen Fällen, so lässt sich die Existenz von K′ in ähnlicher Art, wie die von G, erweisen.

Daher hat man, unter C den grösseren der Beträge der Zahlen A, B in (1) verstanden,

$$\left|\sum_1^n g_r \tau_r - \sum_1^{n'} g_r' \tau_r'\right| \leqq C \sum_1^{n''} \tau_r''. \tag{29*}$$

Würden wir das Gebiet $\mathfrak{F}$ durch ein endliches Punktsystem in der xy-Ebene ersetzen, so müssten wir $\tau_1' \ldots \tau_{n'}'$ diejenigen unter den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ sein lassen, welche nur aus Punkten bestehen, die zum Systeme $\mathfrak{F}$ gehören. Dann braucht G' nicht gleich G, K' nicht gleich K zu sein. Dies gilt selbst im Falle, dass in allen Punkten von $\mathfrak{F}$ $f(x, y) = 1$, somit $G = K (= \mathsf{A})$ ist. Jetzt ist auch $G' = K'$. Setzen wir $G' = K' = \mathsf{A}'$, so ist $\mathsf{A}' \geqq 0$ und nach (29) $\mathsf{A} \geqq \mathsf{A}'$. Wenn $\mathsf{A} > \mathsf{A}'$ ist, so heisst A die äussere, A' die innere Flächenzahl des Systemes $\mathfrak{F}$. Ist aber $\mathsf{A} = \mathsf{A}'$, so nennt man den gemeinsamen Werth der beiden Zahlen den Inhalt des Systemes $\mathfrak{F}$.

Lassen wir nun $\mathfrak{F}$ wieder eine Fläche sein und machen wir die Voraussetzung, dass die Ränder derselben sämmtlich gewöhnliche Curven seien, dass also die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ von einer Parallelen zur x-Axe höchstens in $2p$, von einer zur y-Axe höchstens in $2q$ Punkten geschnitten wird. Wir wählen als Vielecke τ_r zunächst die in Nr. 2 eingeführten Rechtecke $\delta_r \varepsilon_s$, deren Seiten den Coordinatenaxen parallel sind. Dann haben wir nach dem 1. Satze in Nr. 2*

$$\sum_1^{n''} \tau_r'' < 2p(b' - b)\Delta + 4q(a' - a)\mathsf{E}. \tag{30}$$

Dabei bedeutet a die kleinste und a' die grösste unter den Abscissen der Punkte von $\mathfrak{F}$, b die kleinste und b' die grösste unter ihren Ordinaten und die τ_r'' diejenigen unter den Rechtecken $\delta_r \varepsilon_s$, welche neben Punkten von $\mathfrak{F}$ auch nicht dazu gehörige Punkte enthalten. Da ferner Δ das grösste aller δ_r, E das grösste aller ε_s sein soll, so kann man bei der obigen Annahme der τ_r dadurch, dass man

$$\Delta < \varkappa : 4p(b' - b)C \qquad \mathsf{E} < \varkappa : 8q(a' - a)C$$

nimmt, die rechte Seite der Beziehung (29*) kleiner als die beliebig vorgegebene Zahl $\varkappa$ machen. Wir wissen aber

bereits, dass die linke Seite von (29*) bei $\lim \tau_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ einen bestimmten Grenzwerth nämlich $|G - G'|$ besitzt. Hier ist also $|G - G'| \leqq \varkappa$; somit $G = G'$. Ebenso zeigt man, dass $K = K'$ ist.

Eine wichtige Anwendung des Satzes auf S. 48 bei der Annahme $f(x, y) = 1$ besteht darin, dass wir das schon oben eingeführte positive Doppelintegral

$$\mathsf{A} = \mathop{S}_{(\mathfrak{F})} d\mathsf{A} = \iint_{(\mathfrak{F})} dx\,dy \tag{31}$$

nunmehr als die zu der von einfachen, gewöhnlichen Rändern begrenzten ebenen Fläche $\mathfrak{F}$ gehörige Zahl oder als ihren, je nachdem der äussere Rand im positiven oder negativen Sinne beschrieben ist, mit dem Zeichen $+$ oder $-$ versehenen Inhalt erklären dürfen. Wir entnehmen nämlich aus dem Vorstehenden, dass, was immer für ein System von Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ über $\mathfrak{F}$ ausgebreitet werden mag, nicht blos die Summe $\sum_1^n r\, \tau_r$, sondern auch die: $\sum_1^{n'} r\, \tau_r'$ dadurch, dass wir ein jedes τ_r nach den beiden Dimensionen der Ebene zur Null convergiren lassen, zu einem und demselben Grenzwerthe A übergeht. Für eine geradlinig begrenzte Fläche $\mathfrak{F}$ bedürfen wir freilich dieser Ueberlegung nicht mehr, weil bezüglich der für eine solche in der Planimetrie aufgestellten Maßzahl dort nachgewiesen werden kann, dass bei jeder Zerschneidung von $\mathfrak{F}$ durch Gerade die Summe der Zahlen der einzelnen Theile von $\mathfrak{F}$ der Zahl von $\mathfrak{F}$ gleichkommt.

Die Formel (26) auf S. 57 hat für ein beliebiges Punktsystem in der Ebene zuerst der Verfasser in den math. Ann. Bd. 23 S. 154 aufgestellt und auf dieselbe Art wie in Nr. 3 bewiesen. Dass aber jedes solche Punktsystem im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Zahlen, der äussern und innern Flächenzahl, Veranlassung giebt, wurde zuerst von G. Peano erkannt (vgl. dessen Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale 1887 S. 156). Er erklärt die erstere, A, als die untere Grenze aller Summen $\sum_1^n r\, \tau_r$, die letztere, $\mathsf{A}' \leqq \mathsf{A}$, als die obere Grenze aller Summen $\sum_1^{n'} r\, \tau_r'$. C. Jordan führte dann die letztere

als den Grenzwerth von $\sum_{1}^{n'} r\tau_r'$ bei $\lim \tau_r = 0$ $(r = 1 \ldots n)$ ein (Journal de Math. 1892 S. 76 C. d'Analyse 2. éd. I Nr. 36). — Man erkennt aus der Entwickelung in Nr. 3 auch, dass man die Peano'sche Erklärung der äusseren (inneren) Flächenzahl auf das obere (untere) Doppelintegral nur dann ausdehnen könne, wenn die Function innerhalb des Integrationsgebietes keine negativen Werthe annimmt. Vgl. auch die Bemerkungen des Verfassers über diesen Gegenstand in Monatshefte Bd. VII S. 291, VIII S. 95.

4*. Beispiele zu Nr. 3 und 4.

Zunächst wollen wir die soeben erwähnten Flächenzahlen eines ebenen Punktsystems durch ein paar Beispiele erläutern. Um auf einfache Weise ein Punktsystem in der Ebene zu bilden, denken wir uns auf der x-Axe ein endliches Punktsystem gegeben und in jedem dazu gehörigen Punkte auf der positiven Seite dieser Axe ein Loth von der Länge 1 errichtet. Das aus allen Punkten eines jeden solchen Lothes bestehende System hat, wie leicht zu sehen ist, zu Flächenzahlen die Längenzahlen des auf der x-Axe angenommenen Punktsystems[1]), so dass wir nur diese zu ermitteln brauchen.

1) Wenn $\mathsf{A} = 0$ ist, so ist auch $\mathsf{A}' = 0$. Das ebene Punktsystem hat den Inhalt Null und wird nach A. **Harnack** als **discret** bezeichnet.[2]) Auf der x-Axe wird ein solches und zwar ein **vollständiges**[1]) gebildet von den Punkten $x = 0$ und $x = 1:n$, wo n jede natürliche Zahl $1, 2 \ldots$ sein soll. Dies wird so gezeigt. Trägt man vom Punkte $x = 0$ auf der positiven x-Axe ein kleines Stück δ auf, so liegen ausserhalb desselben eine endliche Anzahl $m(\delta)$ von den Punkten $x = 1:n$. Wenn man dann vom Endpunkte dieses Stückes gleiche Strecken δ' so weit aufträgt, bis der Punkt $x = 1$ erreicht wird, so ist die Summe aller Strecken, zu welchen Punkte unseres Systems gehören, sicher kleiner als $\delta + 2m(\delta)\delta'$. Diese Zahl ist kleiner als die beliebig vorgelegte $\varkappa > 0$, wenn

1) Vgl. Nachtrag I.

2) Vgl. Math. Ann. Bd. 19, S. 238.

man zunächst für δ eine bestimmte Länge kleiner als $\varkappa : 2$ wählt und hierauf $\delta' < \varkappa : 4m(\delta)$ annimmt.[1])

2) Dann wollen wir ein vollständiges Punktsystem auf der x-Axe vorführen, dessen äussere und innere Länge von einander verschieden sind. Dasselbe besteht aus den Zahlen 0 und 1 und sämmtlichen echten endlichen Decimalbrüchen mit ungeradem Zähler, sowie allen echten unendlichen Decimalbrüchen (seien sie rational oder irrational), welche nicht von einer bestimmten Stelle an lauter gerade Ziffern (d. i. 0, 2, 4, 6, 8) besitzen. Da dieses System in der Umgebung gar keines Punktes im Intervalle (0, 1) stetig ist, so ist seine innere Länge $\mathsf{A}' = 0$. Seine äussere Länge A ist aber 1.

3) Um ein nichtstetiges Punktsystem auf der x-Axe zu erhalten, dessen beide Längen einander gleich sind, fügen wir zu den bereits erwähnten Punkten $x = 0$, $x = 1 : n$ alle Punkte $0 > x \geqq -1$. Für dieses System ist sowohl die äussere, als auch die innere Länge gleich 1.

4) Fügt man die Punkte $0 > x \geqq -1$ aber zu dem unter 2) beschriebenen Systeme, so erhält man eines, dessen äussere Länge A gleich 2, dessen innere A' aber gleich 1 ist. Beide Längen sind somit von einander und von Null verschieden.

Endlich legen wir eine Function vor, welche in dem endlichen Gebiete $\mathfrak{F}$ kein Doppelintegral besitzt. Es ist dies die Function $f(x, y)$, welche im Falle, dass x und y rationale Zahlen sind, den Werth 1, in jedem anderen Falle aber den Werth -1 hat. Für sie haben wir durchaus $g_r = 1$, $k_r = -1$, somit

$$\sum_1^n{}^r g_r \tau_r = \sum_1^n{}^r \tau_n \quad \sum_1^n{}^r k_r \tau_r = -\sum_1^n{}^r \tau_n.$$

Also ist das obere Integral der in Rede stehenden Function über das Gebiet $\mathfrak{F}$ die Zahl A desselben, das untere aber $-\mathsf{A}$. Die beiden Integrale sind also von einander verschieden.

---

1) Auf ähnliche Weise zeigt man, dass jedes unendliche Punktsystem in einer endlichen Strecke der x-Axe, welches nur eine Ableitung d. i. nur eine endliche Anzahl von Grenzpunkten besitzt, discret ist. — Ist das gemacht, so kann man nach demselben Verfahren erschliessen, dass auch jedes Punktsystem mit blos zwei Ableitungen u. s. f., kurz jedes Punktsystem erster Gattung (vgl. Nachtrag I) discret ist.

5. Allgemeine Bedingung zum Vorhandensein eines eigentlichen[1]) Doppelintegrals. Erklärung desselben durch einen Grenzwerth.

1. Satz.[2]) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die in dem auf S. 47 beschriebenen Gebiete $\mathfrak{F}$ allenthalben eindeutige und endliche Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über dasselbe besitzt, besteht nach S. 49 darin, dass $G = K$ oder

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n (g_r - k_r)\,\tau_r = 0 \tag{1}$$

ist. D. h. jedem $\varkappa > 0$ entspricht ein $\lambda > 0$ so, dass wenn nur der Durchmesser eines jeden Vielecks τ_r kleiner als λ ist, stets

$$0 \leqq \sum_1^n (g_r - k_r)\,\tau_r < \varkappa \tag{1*}$$

ist.“ Man setzt gewöhnlich $g_r - k_r = \sigma_r$ und bezeichnet σ_r nach Riemann[3]) als Schwankung der Function $f(x, y)$ im Gebiete τ_r.

Diese Bedingung lässt sich jedoch bedeutend vereinfachen.

2. Satz. Zur Existenz des Doppelintegrals der Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl $\varkappa$ sich mindestens ein System das Gebiet $\mathfrak{F}$ gerade bedeckender Vielecke $\tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_n$ so zuordnen lässt, dass die nicht-negative Summe $\sum_1^n \sigma_r\,\tau_r$ kleiner als $\varkappa$ ist.

Die Nothwendigkeit der angegebenen Bedingung leuchtet nach dem 1. Satze unmittelbar ein. Dass sie auch ausreicht, lässt sich ebenfalls leicht zeigen. Bemerken wir zunächst, dass wenn für das eine System $\tau_1 \ldots \tau_n$

---

1) In diesem Abschnitte, wo noch keine uneigentlichen Doppelintegrale vorkommen, wird das Beiwort „eigentlich“ vor Doppelintegral zumeist weggelassen.

2) Vgl. die in der Note auf S. 47 angeführten Stellen.

3) Werke 1876 S. 225.

$$0 \leqq \sum_1^n {}_r\, \sigma_r\, \tau_r < \varkappa \tag{2}$$

ist, dasselbe auch gilt für jedes das Gebiet $\mathfrak{F}$ gerade bedeckende System von Vielecken, welche durch Zerstückelung der $\tau_1 \dots \tau_n$ entstehen. Denn die neue Summe kann nicht grösser sein als $\sum \sigma_r \tau_r$, weil erstens einige Theile der $\tau_1 \dots \tau_n$ in der neuen Summe nicht mehr vorkommen und zweitens jeder darin vorhandene Theil der $\tau_1 \dots \tau_n$ mit einer Zahl multiplicirt ist, die nicht kleiner ist als das σ_r, womit in $\sum \sigma_r \tau_r$ jenes τ_r multiplicirt ist, zu dem dieser Theil gehört. Das Letztere folgt aus dem Satze 2) auf S. 50. Wir dürfen daher von vornherein annehmen, dass jedes der in dem 2. Satze, sowie in (2) vorkommenden Vielecke τ_r kleiner ist als eine beliebig gegebene Zahl λ^2. Nun ist aber nach (2) auf S. 48, falls nur $\tau_r < \lambda^2$ $(r = 1, 2 \dots n)$ ist,

$$G < \sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r + \varkappa \qquad K > \sum_1^n {}_r\, k_r \tau_r - \varkappa,$$

also

$$0 \leqq G - K < \sum_1^n {}_r\, \sigma_r \tau_r + 2\varkappa.$$

Es ist mithin nach (2) $G - K < 3\varkappa$. Hieraus folgt, da $\varkappa$ jede positive Zahl sein darf, nothwendig $G - K = 0$, w.z.b.w.

3. Satz. Erklärung des Doppelintegrals durch einen Grenzwerth.[1])

„Es sei die Function $f(x, y)$ wie bisher im Gebiete $\mathfrak{F}$, das die Vielecke $\tau_1 \dots \tau_n$ gerade bedecken, eindeutig und endlich. Wenn dann die beiden Summen

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r \qquad \sum_1^n {}_r\, k_r \tau_r$$

bei $\lim \tau_r = 0$ einen und denselben endlichen Grenzwerth J haben, so ist auch

1) Vgl. insbesondere O. Stolz, Math. Ann. XXVI S. 86. E. Picard, Traité d'Analyse I S. 93.

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_1^n {}_r f_r \tau_r = J, \tag{2*}$$

wo f_r irgend einen bestimmten Werth im Intervalle (k_r, g_r) bedeutet, also $k_r \leqq f_r \leqq g_r$ ist. Und insbesondere: Bezeichnet x_r, y_r irgend einen Punkt des Vieleckes τ_r und hat

$$\sum_1^n {}_r f(x_r, y_r)\,\tau_r$$

für $\lim \tau_r = 0$ bei jeder Wahl der Punkte $x_r y_r$ den nämlichen endlichen Grenzwerth J, so ist derselbe das Doppelintegral von $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$. Man hat also

$$J = S_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dA = \lim_{\tau_r=0} \sum_1^n {}_r f(x_r, y_r)\,\tau_r. \tag{3}$$

D. h. es genügt die Zahl J der Forderung, dass jeder Zahl $\varkappa > 0$ eine andere $\lambda > 0$ so entspricht, dass wenn nur der Durchmesser eines jeden Vieleckes

$$\tau_r \quad (r = 1, 2 \ldots n)$$

kleiner als λ ist, dann

$$\left| \sum_1^n {}_r f(x_r, y_r)\,\tau_r - J \right| < \varkappa \tag{4}$$

ist, mag x_r, y_r was immer für ein Punkt von τ_r sein."

Beweis. Da

$$k_r \leqq f_r \leqq g_r \quad (r = 1, 2 \ldots n)$$

ist, so hat man

$$\sum_1^n {}_r k_r \tau_r \leqq \sum_1^n {}_r f_r \tau_r \leqq \sum_1^n {}_r g_r \tau_r. \tag{5}$$

Bestehen nun die Formeln (5) und (6) auf S. 51 und ist $G = K = J$, so folgt aus (5) unmittelbar die Formel (2*). Indess ergiebt sich schon aus (3) die Gleichung $G = K = J$. Dies würde ohne Weiteres einleuchten, wenn in jedem Vielecke τ_r ein Punkt x_r', y_r' sich befinden würde, wofür $f(x_r', y_r') = g_r$ ist und einer x_r'', y_r'', wofür $f(x_r'', y_r'') = k_r$ ist. Allein weder

das Eine, noch das Andere braucht der Fall zu sein. Jedenfalls giebt es aber zu jedem $\sigma > 0$ einen Punkt x_r', y_r' in τ_r derart, dass $f(x_r', y_r') > g_r - \sigma$ ist.

Wir haben also

$$\sum_1^n {}_r g_r \tau_r \geqq \sum_1^n {}_r f(x_r', y_r') \tau_r > \sum_1^n {}_r g_r \tau_r - \sigma \sum_1^n {}_r \tau_r. \quad (6)$$

Setzen wir in (4) $x_r = x_r'$, $y_r = y_r'$, so finden wir

$$J + \varkappa > \sum_1^n {}_r f(x_r', y_r') \tau_r > J - \varkappa, \quad (6^*)$$

wenn nur der Durchmesser D_r eines jeden τ_r kleiner als λ ist. Und wir dürfen nach (26) und (27) in Nr. 3 behaupten, dass unter denselben Umständen

$$\mathsf{A} + \varkappa > \sum_1^n {}_r \tau_r \geqq \mathsf{A} \quad (7)$$

ist. Demnach folgt aus (6) und (6*), dass wenn $D_r < \lambda$ ist,

$$\sum_1^n {}_r g_r \tau_r > J - \varkappa, \quad J + \varkappa > \sum_1^n {}_r g_r \tau_r - \sigma(\mathsf{A} + \varkappa)$$

$$\varkappa > J - \sum_1^n {}_r g_r \tau_r > -\varkappa - \sigma(\mathsf{A} + \varkappa)$$

ist. Denkt man sich σ so angenommen, dass

$$\sigma(\mathsf{A} + \varkappa) < \varkappa$$

ist, so ist mithin neben $D_r < \lambda$ $(r = 1, 2 \ldots n)$

$$\left| J - \sum_1^n {}_r g_r \tau_r \right| < 2\varkappa,$$

d. h. es besteht die Formel

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n {}_r g_r \tau_r = J.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich die Formel

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n {}_r k_r \tau_r = J.$$

In manchen Fällen ist es bequemer, anstatt der in der Formel (3) enthaltenen Erklärung des Doppelintegrals die nachstehende zu benützen. Von den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$, die über das Gebiet $\mathfrak{F}$ ausgebreitet sind, wollen wir nur jene $\tau_1' \ldots \tau_{n'}'$ berücksichtigen, zu welchen nur Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören und die ihnen entsprechende Summe

$$\sum_1^{n'} {}_r f(x_r', y_r') \tau_r'$$

bilden, wobei x_r', y_r' irgend einen Punkt des Vieleckes τ_r' bedeutet. Auch sie hat, wenn alle Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ nach den beiden Dimensionen der Ebene ins Unendliche abnehmen, das Doppelintegral $J = S_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dA$ zum Grenzwerth. Das ergiebt sich aus der Gleichung (II) auf S. 48 in ähnlicher Art, wie die Formel (3) aus (I) a. a. O. Wir haben also auch

$$S_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dA = \lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n'} {}_r f(x_r', y_r') \tau_r'. \tag{8}$$

Die Formeln (3) und (8) gelten natürlich auch, wenn die Vielecke τ_r in irgend einer Art specialisirt werden, wenn sie nur so definirt sind, dass sie nach den beiden Dimensionen der Ebene ins Unendliche abnehmen können. Umgekehrt folgen aus den so specialisirten Formeln sogleich die allgemeinen (3) und (8). Denn wenn die Gleichung (1) auf S. 63 auch nur für eine besondere Art von Vielecken besteht, so muss sie nach dem obigen 2. Satze allgemein gelten. — Man wendet insbesondere oft die in Nr. 2 beschriebene Zerlegung des Gebietes $\mathfrak{F}$ in Rechtecke, deren Seiten zu den Coordinatenaxen parallel sind, an. Bedeutet $x_{r,s}\, y_{r,s}$ einen Punkt des Rechteckes $MM'M'''M''$ auf S. 40 mit den Ecken (a_{r-1}, b_{s-1}) u. s. w., so hat man

$$J = \iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\delta_r = 0\ \varepsilon_s = 0} \sum_r \sum_s f(x_{r,s}, y_{r,s})\, \delta_r \varepsilon_s, \tag{9}$$

wobei die Summe rechts entweder auf alle Rechtecke $\delta_r \varepsilon_s$, zu denen überhaupt ein Punkt von $\mathfrak{F}$ gehört, oder auf alle

solche Rechtecke, zu denen blos Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören, zu erstrecken ist. Durch die Formel (9) wird das Auftreten der beiden $\int$ im Zeichen des Doppelintegrals erklärt; sie sollen an die rechts stehende Doppelsumme erinnern. Der Sinn der Formel (9) ist natürlich: „Jeder Zahl $\varkappa > 0$ lässt sich eine andere $\lambda > 0$ so zuordnen, dass

$$\left| \sum_r \sum_s f(x_{rs}, y_{rs})\, \delta_r \varepsilon_s - J \right|,$$

die Doppelsumme ausgedehnt auf eine der soeben erwähnten Schaaren von Rechtecken $\delta_r \varepsilon_s$, stets kleiner ist als $\varkappa$, wenn nur jede der Zahlen δ_r in (3) und jede der Zahlen ε_s in (5) auf S. 39 kleiner als λ ist.

Die Definitionen (3), (8), (9) des Doppelintegrals lassen sich auf eine eindeutige complexe Function $f(x, y)$ der reellen Veränderlichen $x\, y$ ausdehnen. Sind $\varphi(x, y)$ $\psi(x, y)$ die Coordinaten von $f(x, y)$, so dass

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\, i$$

ist, so hat man

$$\sum_1^n f(x_r, y_r)\, \tau_r = \sum_1^n \varphi(x_r, y_r)\, \tau_r + i \sum_1^n \psi(x_r, y_r)\, \tau_r.$$

Bezeichnen ferner I, K die Coordinaten von J, so ist

$$\left| \sum_1^n f_r(x_r, y_r)\, \tau_r - J \right|$$

$$= \sqrt{\left(\sum_1^n \varphi(x_r, y_r)\, \tau_r - \mathsf{I} \right)^2 + \left(\sum_1^n \psi(x_r, y_r)\, \tau_r - \mathsf{K} \right)^2}.$$

Somit ergiebt sich aus (4), dass, wenn nur der Durchmesser jedes Vielecks τ_r kleiner als λ ist, sowohl

$$\left| \sum_1^n \varphi(x_r, y_r)\, \tau_r - \mathsf{I} \right| < \varkappa, \text{ als auch } \left| \sum_1^n \psi(x_r, y_r)\, \tau_r - \mathsf{K} \right| < \varkappa$$

ist. Demnach hat, wenn die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzt, sowohl die Function $\varphi(x, y)$, als auch die Function $\psi(x, y)$ über das nämliche Gebiet $\mathfrak{F}$ ein Doppelintegral und es ist

$$\boldsymbol{S}_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, d\mathsf{A} = \boldsymbol{S}_{(\mathfrak{F})} \varphi(x, y)\, d\mathsf{A} + i\, \boldsymbol{S}_{(\mathfrak{F})} \psi(x, y)\, d\mathsf{A}. \qquad (10)$$

Im Folgenden kommen jedoch Doppelintegrale complexer Functionen von x und y nur gelegentlich vor; es wird also, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, nur von reellen Functionen von x, y die Rede sein.

6. Functionen, welche ein eigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulassen.

Es genügt hier, von solchen Functionen nur die am nächsten liegenden Arten zu erwähnen.

1) Eine reelle Function $f(x, y)$, welche in jedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{F}$ (die Begrenzung desselben eingeschlossen) stetig in Bezug auf die beiden Veränderlichen x, y ist, hat ein Doppelintegral über dieses Gebiet.

Da $f(x, y)$ in jedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{F}$ stetig ist, so lässt sich jeder positiven Zahl ε eine andere $\delta > 0$ so zuordnen, dass wenn nur (x, y), (x', y') zwei Punkte des Gebietes $\mathfrak{F}$ sind, deren Abstand

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

kleiner als δ ist, stets

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon \tag{11}$$

ist. Dieser Satz wird ähnlich, wie der entsprechende für eine Function einer Veränderlichen gezeigt (vgl. I. S. 348 II. S. 14). Bemerken wir ferner, dass eine in irgend einem Gebiete allenthalben stetige Function von x und y daselbst ihre obere und untere Grenze erreicht (II. S. 14), dass es also z. B. im Vielecke τ_r Punkte (x, y), (x', y') giebt, wofür

$$f(x, y) = g_r \quad f(x', y') = k_r$$

ist, so können wir aus (11) schliessen, dass wenn nur der Durchmesser D_r von τ_r kleiner als δ ist,

$$0 \leqq \sigma_r = g_r - k_r < \varepsilon$$

ist. Mithin ist, falls nur der Durchmesser eines jeden Vielecks τ_r kleiner als δ ist,

$$0 \leqq \sum_1^n {}_r\, \sigma_r \tau_r < \varepsilon \sum_1^n {}_r\, \tau_r.$$

Dabei mögen wir uns nach (7) δ auch so klein denken, dass

$$\sum_1^n \tau_r < \mathsf{A} + \varkappa'$$

ist, unter $\varkappa'$ eine gegebene positive Zahl verstanden. Wir haben also unter der Voraussetzung, dass $D_r < \delta$ $(r = 1, \dots n)$ ist,

$$0 \leqq \sum_1^n \sigma_r \tau_r < \varepsilon (\mathsf{A} + \varkappa'),$$

wobei $\varepsilon (\mathsf{A} + \varkappa')$ jeder vorgegebenen Zahl $\varkappa > 0$ gleich sein kann. D. h. es ist

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n \sigma_r \tau_r = 0.$$

2) Auch eine Function $f(x, y)$, welche im Gebiete $\mathfrak{F}$ endlich und in allen Punkten desselben mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und den Punkten einer endlichen Anzahl von gewöhnlichen Linien (S. 37) stetig in Bezug auf x und y ist, hat ein Doppelintegral über dieses Gebiet. Und zwar ist der Werth desselben unabhängig von den Werthen von $f(x, y)$ in den ausgeschlossenen Punkten, wenn sie nur endlich sind.

Der Beweis dieses Satzes wird durch Benutzung des 2. Satzes in Nr. 5 vereinfacht. Wir brauchen nur zu zeigen, dass sich jeder positiven Zahl $\varkappa$ eine Schaar von das Gebiet $\mathfrak{F}$ gerade bedeckenden Vielecken τ_r zuordnen lässt, wofür $\sum \sigma_r \tau_r$ kleiner als $\varkappa$ ausfällt. Als solche wählen wir Rechtecke $\delta_r \, \varepsilon_s$ mit den Axen parallelen Seiten, wie sie in Nr. 2 eingeführt wurden. $c_1 \dots c_h$ seien die einzelnen Punkte, worin $f(x, y)$ unstetig ist, $L_1 \dots L_i$ die Unstetigkeitslinien dieser Function. Dann denken wir uns die Theile δ_r und ε_s zunächst nur so angenommen, dass jeder der Punkte $c_1 \dots c_h$ im Innern eines Rechteckes $\delta_r \varepsilon_s$ liegt und keiner von den Punkten der Linien $L_1 \dots L_i$ eine Ecke eines solchen bildet. Diejenigen Rechtecke, zu welchen Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören, seien mit $\tau_1{}^0 \dots \tau_N{}^0$ und darunter jene, welche weder einen

der Punkte $c_1 \ldots c_h$ enthalten, noch mit einer der Linien $L_1 \ldots L_i$ einen Punkt gemein haben, mit $\tau_1^0 \ldots \tau_k^0$ bezeichnet. Liegen alle zum Gebiete $\mathfrak{F}$ gehörigen Werthe von $f(x, y)$ zwischen den Zahlen A und B, so ist jedenfalls

$$g_r^0 - k_r^0 = \sigma_r^0 \leqq B - A.$$

Somit ist

$$\sum_{k+1}^{n}{}_r \sigma_r^0 \tau_r^0 \leqq (B - A)\{h\Delta^2 + p(a' - a)\Delta + 2q(b' - b)\Delta\}, \quad (12)$$

worin Δ das grösste der Theilchen δ_r und ε_s, p die grösste Zahl von Punkten, welche eine Parallele zur x-Axe mit den Linien $L_1 \ldots L_i$, q die grösste Zahl von Punkten, welche eine Parallele zur y-Axe mit diesen Linien gemein hat, bedeutet. Denn h Rechteckchen $\delta_r\,\varepsilon_s$ enthalten je einen der Punkte $c_1 \ldots c_h$, während die Summe derjenigen, welche mit einer der Linien $L_1 \ldots L_i$ mindestens einen Punkt gemein haben, nach dem 1. Satze in Nr. 2* abgeschätzt ist. Wird nun die positive Zahl $\varkappa$ vorgelegt, so nehmen wir zunächst Δ so klein an, dass

$$(B - A)\{h\Delta^2 + p(a' - a)\Delta + 2q(b' - b)\Delta\} < \varkappa : 2 \quad (13)$$

ist. Das ist, da wir ohne Weiteres $\Delta < 1$ annehmen dürfen, sicher erfüllt, falls

$$\Delta < \varkappa : 2(B - A)\{h + p(a' - a) + 2q(b' - b)\} \; (= \lambda)$$

ist. Denken wir uns die Rechtecke $\tau_{k+1}^0 \ldots \tau_N^0$ demgemäss fixirt, so können wir, da in dem von $\mathfrak{F}$ noch übrig bleibenden Gebiet $\mathfrak{F}'$, das jedenfalls aus einer endlichen Anzahl von Stücken besteht, $f(x, y)$ ausnahmslos (d.i. mit Einschluss der Begrenzung) stetig ist, jedem $\varkappa' > 0$ ein $\lambda' > 0$ so zuordnen, dass

$$|f(x' y') - f(x, y)| < \varkappa'$$

ist, wenn nur $|x' - x|$ und $|y' - y|$ beide kleiner als λ' sind. Werden nun die auf das Gebiet $\mathfrak{F}'$ bezüglichen δ_r und ε_s kleiner als λ' angenommen, so ist also

$$0 \leqq \sum_1^k{}_r \sigma_r^0 \tau_r^0 < \varkappa' \sum_1^k{}_r \tau_r^0 < \varkappa'(a' - a)(b' - b).$$

Setzt man jetzt $\varkappa' = \varkappa : 2(a' - a)(b' - b)$ und bestimmt darnach λ', so ist die letzte Summe ebenfalls kleiner als $\varkappa : 2$. Es ist somit für jede solche Schaar von Rechtecken $\tau_1^0 \ldots \tau_N^0$ nach (12)

$$0 \leqq \sum_1^N \sigma_r^0 \tau_r^0 < \varkappa$$

w. z. b. w.

Der Werth des Doppelintegrals der obigen Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ hängt davon nicht ab, welche Werthe diese Function in den Punkten $c_1 \ldots c_h$ und in denen der Linien $L_1 \ldots L_i$ besitzt. Denken wir uns in der That einer Function $f'(x, y)$ in allen diesen Punkten beliebige Werthe ertheilt, welche nur sämmtlich zwischen den nämlichen Zahlen A' B' liegen, während in den übrigen Punkten von $\mathfrak{F}$ $f'(x, y) = f(x, y)$ sein soll, so hat auch diese Function dem Vorstehenden zufolge ein Doppelintegral J' über das Gebiet $\mathfrak{F}$. J' fällt aber mit J zusammen, wie die Formel (3) auf S. 65 an die Hand giebt. Da nämlich die Punkte $c_1 \ldots c_h$ und die Linien $L_1 \ldots L_i$ kein Flächenstück erfüllen, so braucht unter den Punkten $x_1 y_1 \ldots x_n y_n$ in der genannten Formel keiner von ihnen vorzukommen, wie klein auch die Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ sein mögen. Übrigens ist im Falle, dass man $\tau_1 \ldots \tau_n$ die Rechtecke $\delta_r \varepsilon_s$ sein lässt, mittelst einer der Formel (12) ähnlichen leicht zu zeigen, dass wenn auch unter den $x_1 y_1 \ldots x_n y_n$ einige von den genannten Punkten sich befinden, die Summe der ihnen entsprechenden Glieder von $\sum f'(x_r y_r) \tau_r$ zugleich mit den δ_r und ε_s zur Null convergirt.

Beispiel. „Die Function $x^2 : (x^2 + y^2)$ besitzt über jedes endliche Gebiet $\mathfrak{F}$ ein eigentliches Doppelintegral.“ Diese Function ist stetig in jedem endlichen Punkte ausser $x = 0$ $y = 0$. Für den Punkt $x = 0$ $y = 0$ hat der Bruch $x : (x^2 + y^2)$ keine Bedeutung. Was man aber auch der Function, welche in allen übrigen Punkten diesem Ausdrucke gleich ist, im Punkte $x = 0$ $y = 0$ für einen Werth beilegen mag, unstetig ist sie dort immer. Denn auf dem Halbstrahle $x = r \cos \Theta$ $y = r \sin \Theta$ $(r > 0)$ hat diese Function ausser im Nullpunkte den constanten Werth $\cos \Theta^2$, welcher mit Θ sich ändert. Sie ist jedoch in der ganzen Ebene endlich, denn alle ihre Werthe ausser etwa dem für $x = 0$ $y = 0$ liegen zwischen 0 und 1. Enthält das Gebiet $\mathfrak{F}$ den

Punkt $x=0$ $y=0$ nicht, so gehört demnach die in Rede stehende Function zur ersten der obigen Arten; enthält sie ihn aber, so zur zweiten.

3) Die nächste Klasse der im Gebiete $\mathfrak{F}$ integrirbaren endlichen Functionen bilden diejenigen, deren Unstetigkeiten in folgender Art vertheilt sind. Es seien in $\mathfrak{F}$ eine endliche Anzahl von einzelnen Punkten und gewöhnlichen Linien gegeben. Umgiebt man die ersteren mit Flächen von beliebig kleinem Durchmesser und die letzteren mit Canälen von beliebig kleiner Breite, so möge von $\mathfrak{F}$ ein Gebiet $\mathfrak{F}'$ übrig bleiben, in welchem Unstetigkeiten der Function $f(x,y)$ nur bei einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und bei den Punkten einer endlichen Anzahl von gewöhnlichen Linien vorkommen. Die erstgenannten Punkte und Linien heissen daher Grenzpunkte und Grenzlinien 1. Ordnung. Der Beweis wird ähnlich wie im Falle 2) geführt. So kann man weitergehen zu Grenzpunkten und -Linien 2. und höherer Ordnung.

Anmerkung. Vermöge der Gleichung (10) auf S. 68 besitzt auch eine complexe Function der reellen Veränderlichen x und y, welche einer von den obigen Bedingungen 1) — 3) genügt, ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$.

Endlich sei noch eine über jedes endliche Gebiet doppelt integrirbare Function angeführt, welche zu keiner der vorstehenden Klassen gehört. Sie wurde von P. du Bois-Reymond (J. f. Math. 94. Bd. S. 278) angegeben und wird uns später (S. 88, 140, 186) von Nutzen sein. — Wir bemerken zunächst, dass die Function $\varphi(x)$, welche für jedes rationale x von der Form $(2m+1):2^n$ $(n \geqq 0)$ den Werth $1:2^n$ hat und für jedes andere x verschwindet, über das Intervall $(0,1)$ integrirbar ist. Theilen wir die Strecke 1 in 2^n gleiche Theile, so ergiebt sich für die Summe der Producte von $1:2^n$ in die Schwankung von $\varphi(x)$ in den aufeinanderfolgenden Theilstrecken von der Länge $1:2^n$

$$S_n = \frac{1}{2^n}\left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)+2\varphi\left(\frac{2}{2^n}\right)+2\varphi\left(\frac{4}{2^n}\right)+\cdots+2\varphi\left(\frac{2^n-2}{2^n}\right)+1\right\}.$$

Es ist nämlich $\varphi\left(\frac{2r}{2^n}\right)$ der grösste Werth von $\varphi(x)$ in den beiden Theilstrecken, welche in dem Punkte $x=2r:2^n$ zusammenstossen.

$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ist gleich $\frac{1}{2^n}$. Die Argumente der übrigen in S_n erscheinenden Werthe von $\varphi(x)$ zerfallen in $(n-1)$ Gruppen und zwar sind sie

$$1/2,\quad 1/4\ 3/4,\quad 1/8\ 3/8\ 5/8\ 7/8,\ \ldots\ \frac{1}{2^{n-1}}\ \frac{3}{2^{n-1}}\ \cdots\ \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}.$$

Die bezüglichen Functionswerthe sind: $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, in der zweiten Gruppe durchaus $^1/_4$, in der dritten durchaus $^1/_8$ u. s. f., in der letzten durchaus $\frac{1}{2^{n-1}}$. Demnach ergiebt sich

$$S_n = \left\{\frac{1}{2^n} + 2\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2}}_{n-1}\right] + 1\right\} = \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2^n} + 2(n-1)\,^1/_2 + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2^n} + n\right\} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{n}{2^n}.$$

Somit ist

$$\lim_{n=+\infty} S_n = 0$$

d. h. die Function $\varphi(x)$ ist im Intervalle $(0, 1)$ integrirbar. Und zwar ist, weil $\varphi(x)$ in jedem noch so kleinen Intervalle den Werth Null annimmt,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0.$$

Ebenso findet man, dass wenn r eine ganze Zahl bezeichnet

$$\int_r^{r+1} \varphi(x)\,dx = 0$$

ist. Daher verschwindet bei ganzzahligem p auch

$$\int_0^p \varphi(x)\,.\,dx.$$

Endlich folgt hieraus, dass für jedes beliebige Intervall (a, a')

$$\int_a^{a'} \varphi(x)\,dx = 0$$

ist.

Nunmehr sei $f(x, y)$ eine eindeutige Function von x, y, welche in allen Punkten des von den positiven Coordinatenaxen gebildeten Quadranten verschwindet ausser in den Punkten mit den rationalen Coordinaten

$$x = \frac{2m+1}{2^n} \quad y = \frac{2p+1}{2^q},$$

wofür sie den Werth $\frac{1}{2^n}$ haben soll. Diese Function $f(x, y)$ lässt ein Doppelintegral über das von den Punkten

$$x = 0\ y = 0,\quad x = 1\ y = 0,\quad x = 0\ y = 1,\quad x = 1\ y = 1$$

gebildete Quadrat $\mathfrak{q}$ zu. Um dies zu zeigen, theile man sowohl die Strecke $(0, 1)$ auf der x-Axe, als auch die Strecke $(0, 1)$ auf der y-Axe in je 2^n gleiche Theile und ziehe durch die ersteren Theilpunkte Parallele zur y-Axe, durch die letzteren Parallele zur x-Axe.

Dadurch wird das Quadrat q in 2^{2n} Quadrate zerlegt. Bilden wir nun die Summe aus den Producten des für alle diese Theile von q des gleichen Inhalts $1:2^{2n}$ in die jedem zukommende Schwankung von $f(x, y)$ und bedenken, dass $f(x, y)$ auf jeder in einem rationalen Abstande von der Form $y=(2p+1):2^q$ von der x-Axe befindlichen Parallelen zu derselben für jedes x gleich $\varphi(x)$ ist, auf jeder anderen Parallelen aber durchaus verschwindet, so erhalten wir zunächst für die Summe aller Producte, welche zu den längs einer und derselben Parallelen zur x-Axe liegenden Rechtecken gehören, $S_n:2^n$ und somit für die ganze Summe

$$2^n \times \frac{S_n}{2^n} = S_n.$$

Daraus folgt, dass sie bei $\lim n=+\infty$ den Grenzwerth Null hat. Es ist somit nach dem 2. Satze in Nr. 5 $f(x, y)$ über das Quadrat q doppelt integrirbar. Und zwar hat man offenbar

$$K=0, \quad \text{also} \quad \int\int_{(q)} f(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{13*}$$

Das von den Punkten $x=0\ y=0$, $x=p\ y=0$, $x=0\ y=p$, $x=p\ y=p$, unter p eine natürliche Zahl verstanden, gebildete Quadrat lässt sich durch Parallele zu den Axen, von denen je zwei den Abstand 1 besitzen, in p^2 Quadrate von der Seite 1 zerlegen. Theilen wir jedes von ihnen in der nämlichen Weise wie oben q und bilden die Summe der Producte der zu jedem Rechtecke gehörigen Schwankung von $f(x, y)$ in seinen Inhalt $1:2^{2n}$, so bekommen wir $p^2 S_n$. Auch dieser Ausdruck hat bei $\lim n=+\infty$ den Grenzwerth Null; somit lässt $f(x, y)$ auch über das letztere Quadrat ein Doppelintegral zu. Dasselbe hat ebenfalls den Werth Null. — Da man ein in dem von den positiven Axen gebildeten Quadranten gelegenes Gebiet $\mathfrak{F}$ bei gehörig grossem p durch das soeben erwähnte Quadrat einschliessen kann, so ist $f(x, y)$ auch über $\mathfrak{F}$ doppelt integrirbar (5. Satz auf S. 76).

7. Allgemeine Sätze über die eigentlichen Doppelintegrale.

Aus der Definition (3) des Doppelintegrals auf S. 65 folgen unmittelbar die drei Sätze:

1) „Wechselt das Integrationsgebiet sein Zeichen, so auch das Doppelintegral d. i.

$$S_{(-\mathfrak{F})} f(x, y)\, dA = -S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA.\text{“} \tag{14}$$

Mit dem Integrationsgebiet wechseln nämlich auch die Vielecke τ_r ihr Zeichen.

2) Es ist, wenn C eine Constante bezeichnet,

$$S_{\mathfrak{F}} Cf(x, y)\, dA = C S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA. \qquad (15)$$

3) Das Doppelintegral einer Summe ist gleich der Summe der Doppelintegrale der Addenden. Dies kommt auf den Satz zurück:

$$S_{\mathfrak{F}} \{f_1(x, y) + f_2(x, y)\}\, dA = S_{\mathfrak{F}} f_1(x, y)\, dA + S_{\mathfrak{F}} f_2(x, y)\, dA.$$

4) Eine von m einfachen geschlossenen Rändern begrenzte ebene Fläche $\mathfrak{F}$ heisst m-fach zusammenhängend (XV. 1). Man kann eine solche durch $k\ (< m)$ Querschnitte in eine $(m-k)$-fach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{F}'$ verwandeln. [So wird z. B. die von den beiden Dreiecken ABC und DEF begrenzte, zweifach-zusammenhängende Fläche in Fig. 5* auf S. 41 durch den Schnitt AD in die einfach-zusammenhängende $ABCADEFDA$ verwandelt.] Wir sagen dann, dass

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA = S_{\mathfrak{F}'} f(x, y)\, dA$$

ist.

5) „Wird aber das Gebiet $\mathfrak{F}$ durch eine einfache (d. h. sich selbst nicht schneidende) gewöhnliche Linie $\mathfrak{q}$ in zwei getrennte Gebiete $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ zerlegt, so hat die Function $f(x, y)$, welche ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzen soll, auch über jedes der Gebiete $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ ein Doppelintegral. Dabei ist

$$J = S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA = S_{\mathfrak{F}_1} f(x, y)\, dA + S_{\mathfrak{F}_2} f(x, y)\, dA. \qquad (16)$$

Der Satz gilt auch umgekehrt. Hat die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über jedes von zwei aneinandergrenzenden Gebieten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, so auch über das durch Vereinigung beider entstehende Gebiet $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$ und es besteht die Formel (16).“

Beweis. Dass $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}_1$ (sowie in $\mathfrak{F}_2$) ein Doppelintegral J_1 (bezw. J_2) besitzt, ergiebt sich unmittelbar aus dem 1. Satze in Nr. 5. Denn eine auf die Fläche $\mathfrak{F}_1$ bezogene Summe $\Sigma\, \sigma_r \tau_r$ ist ja niemals grösser als alle jene über die ganze Fläche $\mathfrak{F}$ sich erstreckenden Summen $\Sigma\, \sigma_r \tau_r$, wovon sie einen Theil bildet. — Um die Gleichung (16) zu begründen, überziehen wir das Gebiet $\mathfrak{F}$ mit Rechtecken $\delta_r \varepsilon_s$, deren Seiten zu den Coordinatenaxen parallel sind (vgl. Nr. 2), und theilen die dasselbe gerade bedeckenden Rechtecke $\tau_1^0 \ldots \tau_N^0$

in drei Klassen: 1) jene, zu welchen nur Punkte von $\mathfrak{F}_1$ gehören, 2) jene, zu welchen nur Punkte von $\mathfrak{F}_2$ gehören, und 3) jene, welche entweder mit der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ oder mit der Linie $\mathfrak{q}$ mindestens je einen Punkt gemein haben. Ihnen entsprechend setzen wir

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^N f(x_r, y_r)\,\tau_r^0 = \Sigma f(x_{1,r}, y_{1,r})\,\tau_{1,r}^0 + \Sigma f(x_{2,r}, y_{2,r})\,\tau_{2,r}^0 \\ + \Sigma f(x_{3,r}, y_{3,r})\,\tau_{3,r}^0.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Lassen wir jetzt alle δ_r $(r = 1, 2 \ldots m)$ und alle ε_s $(s = 1, 2 \ldots n)$ gegen Null convergiren, so hat die linke Seite nach (3) auf S. 65 den Grenzwerth J, das erste Glied rechts nach (8) den Grenzwerth J_1, das zweite den Grenzwerth J_2 und das dritte nach dem 1. Satze auf S. 42 den Grenzwerth Null. [Die letzte Behauptung folgt natürlich durch sinngemässe Anwendung der Beziehungen (30) auf S. 59 und (12) auf S. 71, wobei in der zweiten $B - A$ durch C, welche Zahl grösser sein soll als jeder Werth von $|f(x, y)|$ im Gebiete $\mathfrak{F}$, zu ersetzen ist.] Demnach ergiebt sich aus (17) die Gleichung $J = J_1 + J_2$, w. z. b. w.

Ist umgekehrt bekannt, dass die Function $f(x, y)$ in den Gebieten $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, welche längs der Linie $\mathfrak{q}$ an einander grenzen und zusammen die Fläche $\mathfrak{F}$ ausmachen, je ein Doppelintegral besitzt, so hat die rechte Seite von (17) zufolge des soeben Bemerkten bei $\lim \tau_r^0 = 0$ den Grenzwerth $J_1 + J_2$, also auch die linke. Also ist $S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, d\mathsf{A}$ vorhanden (S. 67) und gleich $J_1 + J_2$.

Ein besonderer Fall des Satzes 5) ist dieser:

„Die Zahl der aus zwei (oder mehreren) Theilen bestehenden ebenen Fläche $\mathfrak{F}$ ist gleich der Summe der diesen Theilen zukommenden Zahlen.“ Häufig wird er in wenig logischer Weise zur Erklärung der Zahl einer aus Theilen zusammengesetzten Fläche $\mathfrak{F}$ benutzt.

6) „Wenn die über das positive Gebiet $\mathfrak{F}$ doppelt integrirbare Function $f(x, y)$ in keinem Punkte desselben einen negativen Werth besitzt, so hat man

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, d\mathsf{A} \geqq 0. \quad (18)$$

Hat $f(x, y)$ entweder im Gebiete $\mathfrak{F}$ selbst oder doch in einer Fläche $\mathfrak{G}$, welche einen Theil von $\mathfrak{F}$ bildet, eine positive untere Grenze, so ist das Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}} f(x, y) d\mathsf{A}$ positiv. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $f(x, y)$ in allen Punkten innerhalb $\mathfrak{F}$ stetig ist und nicht in jedem den Werth Null hat."

Die Beziehung (18) ist eine unmittelbare Folgerung aus der zweiten Erklärung des Doppelintegrals (S. 65), indem nunmehr $\Sigma f(x_r y_r) \tau_r \geqq 0$ ist. Der Zusatz wird in ähnlicher Art bewiesen wie der entsprechende auf S. 372 d. I. T. — Aus 6) ergiebt sich sofort der Satz:

7) „Lassen die Functionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ über das positive Gebiet $\mathfrak{F}$ je ein Doppelintegral zu und ist in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ $f(x, y) \geqq g(x, y)$, so hat man

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, d\mathsf{A} \geqq S_{\mathfrak{F}}\, g(x, y)\, d\mathsf{A}.\text{“} \tag{19}$$

8) „Hat die Function $f(x, y)$ im positiven Gebiete $\mathfrak{F}$ sowohl positive, als auch negative Werthe, so folgt aus dem Vorhandensein von $S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, d\mathsf{A}$ auch das von $S_{\mathfrak{F}} |f(x, y)|\, d\mathsf{A}$ und zwar ist

$$|S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, d\mathsf{A}| \leqq S_{\mathfrak{F}} |f(x, y)|\, d\mathsf{A}. \tag{20}$$

Hier steht sicher das Zeichen $<$, wenn sich aus dem Gebiete $\mathfrak{F}$ ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ ausscheiden lässt, in welchem $f(x, y)$ durchaus positiv und eins, $\mathfrak{G}''$, in welchem $f(x, y)$ durchaus negativ ist." Solche Gebiete lassen sich stets angeben, wenn die Function $f(x, y)$ in allen Punkten von $\mathfrak{F}$ stetig ist.

Die Existenz von $S_{\mathfrak{F}} |f|\, d\mathsf{A}$ ist in diesem Falle selbstverständlich. Um sie allgemein zu beweisen, braucht man blos zu bemerken, dass die Schwankung der Function $|f(x, y)|$ in einem beliebigen Gebiete niemals grösser sein kann als die von $f(x, y)$ selbst im nämlichen Gebiete. Nimmt nämlich $f(x, y)$ daselbst entgegengesetzt bezeichnete Werthe an, so ist die obere Grenze g von $f(x, y)$ positiv, die untere k negativ und die Werthe von $|f(x, y)|$ liegen im Intervalle von Null bis zu der grösseren der Zahlen g und $-k$, so dass die Schwankung von $|f(x, y)|$ jedenfalls kleiner als $g - k$ ist.

Die Beziehung (20) und das Weitere folgt dann aus dem Satze 7) durch die Bemerkung, dass

$$-|f(x,y)| \leqq f(x,y) \leqq |f(x,y)|$$

ist.

Die Umkehrung des Satzes 8) ist nicht immer zulässig. So hat z. B. die Function, welche in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ den Werth 1 besitzt, ein Doppelintegral über $\mathfrak{F}$, nicht aber die am Schlusse von S. 62 erwähnte Function, deren absoluter Betrag überall 1 ist. (A. Harnack, Math. Ann. XIX. S. 257 Note.)

9) „Nimmt $f(x,y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ positive und negative Werthe an, so sei die Function $f_1(x,y)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$, wo $f(x,y)$ positiv ist, gleich $f(x,y)$ und in jedem anderen gleich Null. Dagegen sei $f_2(x,y)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$, wo $f(x,y)$ negativ ist, gleich $-f(x,y)$, in jedem anderen gleich Null. Lässt $f(x,y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zu, so auch $f_1(x,y)$ und $f_2(x,y)$."

Wenn die Function $f(x,y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ durchweg stetig ist, so ist der Satz ohne Weiteres ersichtlich. Er gilt indess allgemein, weil die Schwankung von $f_1(x,y)$, sowie die von $f_2(x,y)$ in jedem zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Gebiete nicht grösser sein kann, als die von $f(x,y)$ im nämlichen Gebiete.

Aus dem 7. und 8. Satze folgt unmittelbar:

10) „Ist in dem positiven Gebiete $\mathfrak{F}$ durchaus

$$|f(x,y)| \leqq C$$

und $\mathfrak{F}$ die Zahl der Fläche $\mathfrak{F}$, so hat man

$$|S_{\mathfrak{F}} f(x,y)\, dA| \leqq C\mathfrak{F}."$$

11) „Haben die Functionen $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$, so auch ihr Product $f(x,y)\;\varphi(x,y)$."

Auch dieser Satz ist selbstverständlich für die Functionen der beiden in Nr. 6 aufgeführten Klassen.

Will man ihn allgemein nachweisen, so lasse man G_r, K_r obere und untere Grenze von $f(x,y)\varphi(x,y)$ im Vielecke τ_r sein. Dann giebt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte x', y'; x'', y'' derart, dass

$$f(x',y')\,\varphi(x',y') > G_r - \varepsilon \qquad f(x'',y'')\,\varphi(x'',y'') < K_r + \varepsilon$$

ist. Somit hat man

$$0 \leqq G_r - K_r < f(x', y')\,\varphi(x', y') - f(x'', y'')\,\varphi(x'', y'') + 2\varepsilon,$$

oder

$$0 \leqq G_r - K_r < f(x', y')\{\varphi(x', y') - \varphi(x'', y'')\}$$
$$+ \varphi(x'', y'')\{f(x', y') - f(x'', y'')\} + 2\varepsilon.$$

Nun sei für das ganze Gebiet $\mathfrak{F}$ $|f(x, y)| < C$, $|\varphi(x, y)| < \Gamma$ und ferner sei im Vielecke τ_r die Schwankung von $f(x, y)$, wie bisher, σ_r, die von $\varphi(x, y)$ σ_r'. Wir finden daher

$$G_r - K_r < C\sigma_r + \Gamma\sigma_r' + 2\varepsilon,$$

$$\sum_1^n (G_r - K_r)\,\tau_r < C\sum_1^n \sigma_r \tau_r + \Gamma \sum_1^n \sigma_r' \tau_r + 2\varepsilon \sum_1^n \tau_r.$$

Daraus ergiebt sich vermöge der Relationen

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n \sigma_r \tau_r = 0 \quad \lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n \sigma_r' \tau_r = 0 \quad \lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n \tau_r = A$$

unmittelbar unser Satz.

12) „Hat die Function $\varphi(x, y)$ ausserdem die Eigenschaft, dass ihre Werthe im Gebiete $\mathfrak{F}$ nicht entgegengesetzt bezeichnet sind, und liegt keiner der Werthe von $f(x, y)$ ausserhalb des Intervalles (k, g), so liegt das Doppelintegral

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dA$$

nicht ausserhalb des von den Zahlen

$$k\,S_{\mathfrak{F}}\,\varphi(x, y)\,dA \quad \text{und} \quad g\,S_{\mathfrak{F}}\,\varphi(x, y)\,dA \tag{21}$$

gebildeten Intervalles. — Sind die Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ in allen Punkten des Gebietes $\mathfrak{F}$ stetig und hat die letztere nicht in jedem den nämlichen Werth, so liegt unser Doppelintegral zwischen den Zahlen (21). Dabei ist nach dem 6. Satze $S_{\mathfrak{F}}\,\varphi(x, y)\,dA$ von Null verschieden und es geht der Satz in den Mittelwerthsatz über:

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dA : S_{\mathfrak{F}}\,\varphi(x, y)\,dA = f(X, Y), \tag{22}$$

worin X, Y die Coordinaten eines nicht näher bekannten Punktes innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ bedeuten.“

Beweis. Es sei z. B. durchaus in $\mathfrak{F}$ $\varphi(x, y) \geqq 0$. Da in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$

$$g - f(x, y) \geqq 0 \quad f(x, y) - k \geqq 0$$

ist, so hat man demnach

$$[g - f(x, y)]\,\varphi(x, y) \geqq 0 \quad [f(x, y) - k]\,\varphi(x, y) \geqq 0$$

und somit zufolge des 6. und 3. Satzes

$$\left.\begin{aligned} g S_{\mathfrak{F}}\, \varphi(x, y)\, d\mathsf{A} - S_{\mathfrak{F}}\, f(x, y)\, \varphi(x, y)\, d\mathsf{A} \geqq 0 \\ S_{\mathfrak{F}}\, f(x, y)\, \varphi(x, y)\, d\mathsf{A} - k S_{\mathfrak{F}}\, \varphi(x, y)\, d\mathsf{A} \geqq 0. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Dies ist der erste Theil des Satzes 12). Wenn

$$S_{\mathfrak{F}}\, \varphi(x, y)\, d\mathsf{A}$$

positiv ist, so dürfen wir die Ungleichungen (23) durch diese Zahl dividiren. Dadurch ergiebt sich, dass der Quotient auf der linken Seite von (22), den wir kurz mit μ bezeichnen, zwischen k und g liegt. Ist nun die Function $f(x, y)$ in allen Punkten von $\mathfrak{F}$ stetig, so giebt es in $\mathfrak{F}$ nothwendig Punkte XY, worin sie den Werth μ annimmt.[1])

8. Verwandlung des eigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral.

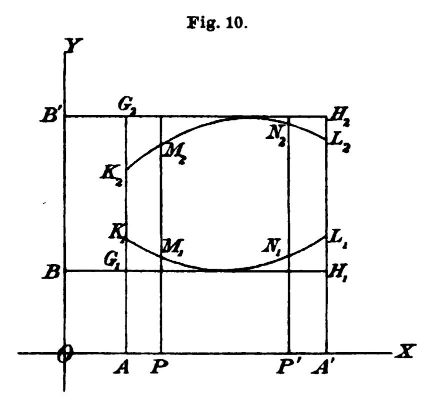
Das Doppelintegral lässt sich direct nicht berechnen; selbst wenn $f(x, y) = 1$ ist, geht dies nur bei den einfachsten Annahmen über das Integrationsgebiet an. Die Auswerthung des Doppelintegrals gelingt jedoch häufig durch Umwandlung desselben in ein zweimaliges Integral. Wie sie vorzunehmen ist, lässt sich aus dem nachstehenden Satze entnehmen, welcher sich auf den gewöhnlich vorkommenden Fall bezieht, dass das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ nur einen Rand hat, der von jeder Parallelen zur Ordinatenaxe höchstens in zwei Punkten geschnitten wird.

---

1) Ist nämlich $f(x', y') = g \;\; f(x'', y'') = k$, so verbinde man die Punkte (x', y'), (x'', y'') durch irgend eine stetige Linie, welche das Gebiet $\mathfrak{F}$ nicht verlässt und die Darstellung $x = \varphi(\tau) \;\; y = \psi(\tau)$ zulässt, wobei $\varphi(\tau') = x' \;\; \psi(\tau') = y'$, $\varphi(\tau'') = x'' \;\; \psi(\tau'') = y''$ und die Functionen $\varphi(\tau) \;\; \psi(\tau)$ für jeden Werth von τ im Intervalle (τ', τ'') stetig sein sollen. Eine solche Linie kann man z. B. aus geraden Strecken zusammensetzen. Da nun die Function $F(\tau) = f[\varphi(\tau), \psi(\tau)]$ stetig ist bei allen den genannten Werthen von τ und $F(\tau') = g \;\; F(\tau'') = k$ ist, so giebt es nach dem Satze auf S. 9 d. I. T. einen Werth T zwischen τ' und τ'' derart, dass $F(\mathsf{T}) = \mu$ ist. Man hat somit, wenn man $\varphi(\mathsf{T}) = X$, $\psi(\mathsf{T}) = Y$ sein lässt, $f(X, Y) = \mu$.

1. Satz.[1]) „Das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ (Fig. 10) sei also die Fläche, welche begrenzt ist von den zur y-Axe parallelen Strecken AK_1K_2 und $A'L_1L_2$ und den gewöhnlichen Linien K_1L_1 und K_2L_2, welche von jeder zwischen den genannten Strecken liegenden Parallelen zur y-Axe nur je in einem Punkte geschnitten werden. Die Punkte K_1K_2 einer- und L_1L_2 andererseits können auch zusammenfallen. Wie in Nr. 2 seien die äussersten Werthe der Abscissen der Randpunkte von $\mathfrak{F}$: OA, OA' mit a, a', die äussersten Werthe ihrer Ordinaten: OB, OB' mit b, b' bezeichnet. Die zur Abscisse $OP = x$ zwischen a und a' gehörigen Ordinaten der Linien K_1L_1, K_2L_2 seien

Fig. 10.



$$\left.\begin{aligned} PM_1 &= y_1 = \varphi_1(x) \\ PM_2 &= y_2 = \varphi_2(x), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ im Intervalle (a, a') von x eindeutige und stetige Functionen vorstellen."

„Ferner sei $f(x, y)$ eine für jeden Punkt des Gebietes $\mathfrak{F}$ eindeutige und darin endliche Function von x, y, so zwar, dass für jeden Punkt von $\mathfrak{F}$

$$|f(x, y)| < C \quad (2)$$

ist. Endlich nehmen wir an, dass $f(x, y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$

---

1) Vgl. A. Harnack in der deutschen Bearbeitung des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung von Serret II. Bd. Nr. 582, ferner Math. Ann. Bd. 26 S. 567, E. Hossenfelder, Ueber die Reihenfolge gewisser Grenzoperationen in der Integralrechnung, Programm des Gymnasiums zu Strassburg in Westpr. 1891 S. 20, C. Arzela, Sugli integrali doppi Mem. dell'Acc. di Bologna ser. 5. T. II (1892) S. 133 flg. Die Zurückführung des 1. Satzes auf den Fall, dass das Integrationsgebiet ein Rechteck ist, hat Pringsheim (Münchner Sitz.-Ber. 1898 S. 73) angegeben. — Den dem 1. Satze entsprechenden über das obere und untere Doppelintegral findet man bei C. Jordan, C. d'An. 2. éd. I Nr. 56 u. 57.

$$J = \iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3}$$

zulasse."

„Ob $f(x, y)$ bei constantem x $(a \leqq x \leqq a')$, d. i. wenn y das Intervall von $\varphi_1(x)$ bis $\varphi_2(x)$ beschreibt, nach y integrirbar ist, lässt sich aus dem Vorstehenden im Allgemeinen nicht entnehmen.[1]) Jedenfalls giebt es aber bei der Endlichkeit dieser Function im Intervalle $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ von y ein oberes und unteres Integral derselben über dieses Intervall, welche im Anschlusse an die in Nr. 3 eingeführten Bezeichnungen mit

$$\int_{y_1}^{(1)\, y_2} f(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{(2)\, y_2} f(x, y)\, dy$$

bezeichnet werden (vgl. Nachtrag II. 1). Bildet man die Function

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{y_1}^{(2)\, y_2} f(x, y)\, dy \\ &+ \left\{ \int_{y_1}^{(1)\, y_2} f(x, y)\, dy - \int_{y_1}^{(2)\, y_2} f(x, y)\, dy \right\} \theta(x), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

worin $\theta(x)$ irgend eine Function von x, deren Werthe im Intervalle $(0, 1)$ liegen, bedeutet, so ist dieselbe im Intervalle (a, a') von x integrirbar und zwar hat man

$$\int_a^{a'} \Phi(x)\, dx = J. \tag{5}$$

Ist

$$\int_{y_1}^{(1)\, y_2} f(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{(2)\, y_2} f(x, y)\, dy$$

d. h. $f(x, y)$ bei einem festen Werthe von x im Intervalle (a, a') nach y von $y_1 = \varphi_1(x)$ bis $y_2 = \varphi_2(x)$ integrirbar, so ist

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy."$$

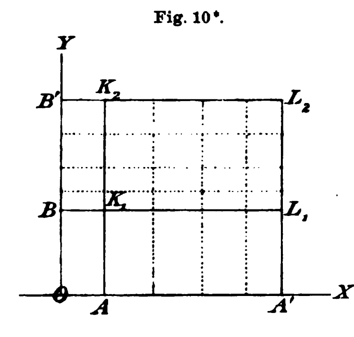
Dieser Satz lässt sich zurückführen auf den einfacheren Fall, dass das Integrationsgebiet das zwischen den Abscissen a, a' und den Ordinaten b, b' liegende

---

1) Näheres darüber bei Pringsheim, Münchner Sitz.-Ber. 1899 S. 40 f.

Rechteck $K_1 L_1 L_2 K_2$ (Fig. 10*) sei. Damit wollen wir uns also zunächst beschäftigen. Denken wir uns zwischen a und a' der Reihe nach irgend welche Werthe $a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}$, desgleichen zwischen b und b' der Reihe nach die Werthe $b_1\, b_2 \ldots b_{n-1}$ eingeschaltet, setzen

Fig. 10*.



$$a_1 - a = \delta_1$$
$$a_2 - a_1 = \delta_2 \ldots$$
$$a' - a_{m-1} = \delta_m;$$
$$b_1 - b = \varepsilon_1$$
$$b_2 - b_1 = \varepsilon_2 \ldots$$
$$b' - b_{n-1} = \varepsilon_n$$

und bezeichnen mit x_r einen beliebigen Werth im Intervalle $(a_{r-1},\, a_r)$ $(r = 1 \ldots m)$ und mit y_s einen solchen im Intervalle $(b_{s-1},\, b_s)$ $(s = 1 \ldots n)$, so lässt sich das nunmehr in Betracht kommende Doppelintegral

$$\iint_{(K_1 L_1 L_2 K_2)} f(x,\, y)\, dx\, dy = H \tag{6}$$

zufolge der Formel (9) auf S. 67 durch die nachstehende

$$H = \lim_{\delta_r = 0\ \varepsilon_s = 0} \sum_1^m {}_r \sum_1^n {}_s f(x_r,\, y_s)\, \delta_r\, \varepsilon_s \tag{7}$$

darstellen. Diese Summe hat mn Glieder, wovon je eines einem jeden der mn Rechtecke entspricht, in welche das Rechteck $K_1 L_1 L_2 K_2$ dadurch zerfällt, dass man durch die auf der X-Axe zwischen A und A' eingeschalteten Punkte die Parallelen zur Y-Axe und durch die auf der Y-Axe zwischen B und B' eingeschalteten Punkte die Parallelen zur X-Axe zieht.

Wir haben nun zu zeigen, dass

$$\lim_{\delta_r = 0} \sum_1^m {}_r \Phi(x_r)\, \delta_r = H \tag{8}$$

ist. Zu diesem Ende setzen wir

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{1}^{m}{}_r \Phi(x)\,\delta_r - H \\ &= \left\{ \sum_{1}^{m}{}_r \Phi(x_r)\,\delta_r - \sum_{1}^{m}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s f(x_r y_s)\,\delta_r\,\varepsilon_s \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{1}^{m}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s f(x_r y_s)\,\delta_r\,\varepsilon_s - H \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Der Ausdruck in der zweiten Zeile rechts hat nach (7) bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1 \ldots m)$, $\lim \varepsilon_s = 0$ $(s = 1 \ldots n)$ den Grenzwerth Null. Wenn wir das Nämliche bezüglich des Ausdruckes in der ersten Zeile zu zeigen vermögen, so ist hierdurch die Formel (8) dargethan.

Ordnen wir die Doppelsumme in (7), welche wir kurz mit S bezeichnen, nach den Zahlen $\delta_1 \ldots \delta_m$, so erhalten wir unmittelbar

$$\sum_{1}^{m}{}_r \Phi(x_r)\,\delta_r - S = \sum_{1}^{m}{}_r \left\{ \Phi(x_r) - \sum_{1}^{n}{}_s f(x_r, y_s)\,\varepsilon_s \right\} \delta_r. \quad (10)$$

Dann bemerken wir zunächst, dass nunmehr nach (4)

$$\int_b^{(2)\,b'} f(x_r, y)\,dy \leqq \Phi(x_r) \leqq \int_b^{(1)\,b'} f(x_r, y)\,dy \quad (11)$$

ist. Wenn wir die obere Grenze von $f(x_r, y)$ im Intervalle (b_{s-1}, b_s) von y mit $g_s^{(r)}$ bezeichnen, so haben wir nach der Beziehung (12) auf S. 355 d. I. T.

$$\int_b^{(1)\,b'} f(x_r, y)\,dy \leqq \sum_{1}^{n}{}_s g_s^{(r)}\,\varepsilon_s. \quad (12)$$

Bedeuten g_{rs} k_{rs} die obere und untere Grenze von $f(x, y)$ im Rechtecke $MM'M'''M''$ mit dem Inhalte $\delta_r\,\varepsilon_s$ (Fig. 4 auf S. 39), so ist $g_s^{(r)} \leqq g_{r,s}$. Man hat also nach (12)

$$\int_b^{(1)\,b'} f(x_r, y)\,dy \leqq \sum_{1}^{n}{}_s g_{r,s}\,\varepsilon_s. \quad (13\text{a})$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich die Beziehung

$$\int_b^{(2)\,b'} f(x_r, y)\,dy \geqq \sum_{1}^{n}{}_s k_{r,s}\,\varepsilon_s. \quad (13\text{b})$$

Aus den Beziehungen (13) folgt mit Rücksicht auf (11), dass

$$\sum_1^n{}_s k_{r,s}\varepsilon_s \leqq \Phi(x_r) \leqq \sum_1^n{}_s g_{r,s}\varepsilon_s \tag{14}$$

ist. Andererseits haben wir, da

$$k_{r,s} \leqq f(x_r, y_s) \leqq g_{r,s}$$

ist,

$$\sum_1^n{}_s k_{r,s}\varepsilon_s \leqq \sum_1^n{}_s f(x_r, y_s)\varepsilon_s \leqq \sum_1^n{}_s g_{r,s}\varepsilon_s. \tag{15}$$

Zufolge der Beziehungen (14) und (15) ist dann

$$\left| \Phi(x_r) - \sum_1^n{}_s f(x_r, y_s)\varepsilon_s \right| \leqq \sum_1^n{}_s (g_{r,s} - k_{r,s})\varepsilon_s,$$

mithin nach (10)

$$\left| \sum_1^m{}_r \Phi(x_r)\delta_r - S \right| \leqq \sum_1^m{}_r \delta_r \sum_1^n{}_s (g_{r,s} - k_{r,s})\varepsilon_s. \tag{16}$$

Da die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über das Rechteck $K_1 L_1 L_2 K_2$ besitzt, so hat man nach dem 1. Satze auf S. 63

$$\lim_{\delta_r = 0\ \varepsilon_s = 0} \sum_1^m{}_r \sum_1^n{}_s (g_{r,s} - k_{r,s})\delta_r \varepsilon_s = 0$$

d. h. es lässt sich jeder Zahl $\varkappa > 0$ eine andere $\lambda > 0$ so zuordnen, dass

$$0 \leqq \sum_1^m{}_r \delta_r \sum_1^n{}_s (g_{r,s} - k_{r,s})\varepsilon_s < \varkappa$$

ist, wenn nur jeder Theil δ_r und jedes ε_s kleiner als λ ist. Unter der nämlichen Voraussetzung über die δ_r und ε_s ist also nach (16)

$$\left| \sum_1^m{}_r \Phi(x_r)\delta_r - S \right| < \varkappa.$$

Damit haben wir die oben angekündigte Formel

$$\lim_{\delta_r = 0\ \varepsilon_s = 0} \left\{ \sum_1^m{}_r \Phi(x_r)\delta_r - \sum_1^m{}_r \sum_1^n{}_s f(x_r, y_s)\delta_r\varepsilon_s \right\} = 0$$

erwiesen.

Um den Satz 1) allgemein zu beweisen, führen wir eine zweite Function $f_1(x, y)$ ein, welche in allen Punkten des vorgelegten Integrationsgebietes $\mathfrak{F}$ gleich der gegebenen Function $f(x, y)$ sei, und in allen übrigen Punkten des Rechteckes $G_1 H_1 H_2 G_2$ in Fig. 10, das zwischen den Abscissen a, a' und den Ordinaten b, b' liegt, verschwinde. Diese Function lässt zufolge des 2. Satzes auf S. 70 ein Doppelintegral über das genannte Rechteck zu. Und zwar ergiebt sich nach dem 5. Satze auf S. 76, da die Doppelintegrale über die einzelnen Theile von $G_1 H_1 H_2 G_2$, welche nach Wegnahme des Gebietes $\mathfrak{F}$ zurückbleiben, Null sind,

$$\iint_{(G_1 H_1 H_2 G_2)} f_1(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy (= J). \quad \text{(a)}$$

Wir haben nun zufolge des gerade früher Bemerkten

$$\iint_{(G_1 H_1 H_2 G_2)} f_1(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a'} \Phi_1(x)\, dx, \quad \text{(b)}$$

worin

$$\Phi_1(x) = \int_b^{(2)b'} f_1(x, y)\, dy + \left\{ \int_b^{(1)b'} f_1(x, y)\, dy - \int_b^{(2)b'} f_1(x, y)\, dy \right\} \theta(x)$$

ist. Allein es ist

$$\int_b^{(1)b'} f_1(x, y)\, dy = \int_b^{y_1} f_1(x, y)\, dy + \int_{y_1}^{(1)\,y_2} f(x, y)\, dy + \int_{y_2}^{b'} f_1(x, y)\, dy,$$

somit, da das erste und dritte Glied verschwindet,

$$\int_b^{(1)b'} f_1(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{(1)\,y_2} f(x, y)\, dy.$$

Ebenso findet man die Gleichung

$$\int_b^{(2)b'} f_1(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{(2)\,y_2} f(x, y)\, dy.$$

Wir dürfen somit $\Phi_1(x) = \Phi(x)$ setzen und gelangen daher von den Formeln (a) (b) unmittelbar zu der zu beweisenden (5).

Die nämliche Schlussweise lässt sich bei beliebiger Gestalt des Gebietes $\mathfrak{F}$ anwenden.

Aus dem vorstehenden Satze folgt aber keineswegs, dass für jede Function $f(x, y)$, welche ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzt, das zweimalige Integral

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

auch nur einen Sinn zu haben braucht. Dies zeigt in der That das nachstehende, von P. du Bois-Reymond gegebene Beispiel.

Betrachten wir das Doppelintegral (13*) auf S. 75. Wenn wir uns

$$x = \frac{2m+1}{2^n} \tag{c}$$

denken, so hat $f(x, y)$ für jedes y von der Form

$$\frac{2q+1}{2^p}$$

den nämlichen Werth $1:2^n$, für alle übrigen y den Werth Null. Diese Function ist also nach y von $y=0$ bis $y=1$ nicht integrirbar, vielmehr ist daselbst ihr oberes Integral $1:2^n$, ihr unteres 0. Für die anderen Werthe von x im Intervalle (0, 1) verschwindet $f(x, y)$ bei allen $y: 0 \leqq y \leqq 1$, es ist somit

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = 0.$$

Eine Function $\Phi(x)$, welche für die ebengenannten Werthe von x verschwindet, für die Werthe (c), welche ein im Intervalle (0, 1) überall-dichtes System bilden, aber gar nicht erklärt ist, ist zu wenig bestimmt, um als integrirbar oder nicht integrirbar im Intervalle (0, 1) bezeichnet zu werden. In der That setzen wir z. B. auch in den Punkten (c) $\Phi(x)=0$, so lässt $\Phi(x)$ ein Integral im Intervalle (0, 1) zu, setzen wir aber daselbst $\Phi(x)=1$, so ist $\Phi(x)$ nicht integrirbar von $x=0$ bis $x=1$. Demnach hat für die in Rede stehende Function $f(x, y)$ das zweimalige Integral

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy$$

keine Bedeutung. Dagegen ist für jedes y, $0 \leqq y \leqq 1$,

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = 0,$$

somit

$$\iint_{q} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} f(x, y)\, dx = 0.$$

2. Satz.[1] „Ist die eindeutige Function $f(x, y)$ in jedem Punkte des in Rede stehenden Gebietes $\mathfrak{F}$ stetig, so hat man

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a}^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.\text{“} \qquad (17)$$

Denn unter dieser Voraussetzung ist nicht nur das Doppelintegral links vorhanden (S. 69), sondern auch das einfache Integral

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \qquad (a \leqq x \leqq a'), \qquad (18)$$

weil $f(x, y)$ bei constantem x eine stetige Function von y ist bei allen Werthen von y, $\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$. Wir haben also nach (4) für jedes x im Intervalle (a, a') zu setzen

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (19)$$

3. Satz. „Die Gleichung (17) gilt auch in dem Falle, dass die Function $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ endlich ist und dabei stetig in allen Punkten von $\mathfrak{F}$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und von gewöhnlichen Linien, welche entweder parallel sind zur y-Axe oder mit jeder Parallelen zu ihr höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein haben (S. 37).“

Beweis wie beim 2. Satze. Nunmehr ist das Integral (18) höchstens für eine endliche Anzahl von Werthen des x im Intervalle (a, a') nicht vorhanden; bei jedem andern x hat die im Intervalle $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ von y endliche Function $f(x, y)$ Unstetigkeiten nur bei einer endlichen Anzahl von Werthen des y innerhalb desselben und ist daher nach y von $y = \varphi_1(x)$ bis $y = \varphi_2(x)$ integrirbar (vgl. I. S. 358).

---

1) Der 2. und 3. Satz wurden vom Verfasser direct bewiesen Math. Ann. Bd. 26 S. 93.

Die Gleichung (17) besteht auch für die auf S. 73 erwähnten Klassen von integrirbaren Functionen $f(x, y)$.

4. Satz. Wir nehmen jetzt an, dass der Rand des Gebietes $\mathfrak{F}$ auch durch eine Parallele zur x-Axe höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, so dass zu jedem zwischen b und b' gelegenen Werthe der Ordinate y zwei Punkte des Randes gehören, deren Abscissen

$$x_1 = \psi_1(y) \qquad x_2 = \psi_2(y)$$

seien. „Alsdann besteht im Falle, dass die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulässt und dabei die im 2. oder 3. Satze angegebenen Eigenschaften besitzt, die Formel

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_b^{b'} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx.\text{“} \quad (20)$$

Es ist nämlich nicht blos die linke, sondern auch die rechte Seite dieser Gleichung gleich dem Doppelintegrale der Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$. Das Letztere folgt aus den vorstehenden Sätzen durch Vertauschung der Abscissen x mit den Ordinaten y.

Beispiel. Man berechne das Doppelintegral der auf S. 72 erwähnten Function $x^2 : (x^2 + y^2)$ über das Dreieck OEH (Fig. 11), wo

$$OE = EH = 1$$

Fig. 11

ist. Lässt man zunächst $x = OP$ constant, so nimmt y in dem Dreiecke OEH alle Werthe von

$$y = 0 \quad \text{bis} \quad y = PM = x$$

an, da OH die Halbirungslinie des rechten Winkels XOY ist. x selbst hat von

$$x = 0 \quad \text{bis} \quad x = 1$$

zu gehen. Man findet somit

$$J = \iint_{(OEH)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x\, dx \int_0^x \frac{x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Bei positivem x ist

$$\int_0^x \frac{x\, dy}{x^2 + y^2} = \Big|_{y=0}^{y=x} \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4},$$

also ist

$$J = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x\, dx = \frac{\pi}{4} \Big|_0^1 \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Weitere Beispiele finden sich in Nr. XVIII. 4 und 7, ferner in XIX. 6, 7, 10.

9. Anwendungen des Satzes von Nr. 8.

Am nächsten liegen die folgenden:

1) „Bezeichnet $\mathfrak{F}$ das nämliche Gebiet wie in der vorigen Nummer, so haben wir nach S. 60 für die Zahl der ebenen Fläche $\mathfrak{F}$

$$\int\int_{(\mathfrak{F})} dx\,dy = \int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^{a'} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx. \text{“} \quad \text{(a)}$$

Lassen wir die Linie

$$y = \varphi_1(x) \qquad (a \leqq x \leqq a')$$

mit der Strecke AA' (Fig. 10) selbst zusammenfallen, so ist

$$\varphi_1(x) = 0 \qquad (a \leqq x \leqq a')$$

zu nehmen und wir erhalten für die Zahl der Fläche $AA'L_2K_2$, wie auf S. 359 d. I. T., den Werth

$$\int_a^{a'} \varphi_2(x)\,dx.$$

2) Wenn die im endlichen Intervalle (a, a') eindeutige und endliche Function $f(x)$ mindestens bei allen x innerhalb desselben stetig ist, die im endlichen Intervalle (b, b') eindeutige und endliche Function $g(y)$ mindestens bei allen y zwischen b und b', so bildet das Product $f(x)\,g(y)$ eine im Rechtecke $ABA'B'$ (Fig. 1 auf S. 12) endliche und innerhalb desselben durchaus stetige Function von x und y. Man hat daher nach dem 2. bezw. 3. Satze der vorigen Nummer

$$\int\int_{(ABA'B')} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x)\,g(y)\,dy$$
$$= \int_a^{a'} f(x)\,dx \,.\int_b^{b'} g(y)\,dy.$$

3) Wenn die eindeutige Function $f(x, y)$ in dem soeben erwähnten Rechtecke $ABA'B'$ ausnahmslos stetig oder, unbeschadet ihrer Endlichkeit daselbst, nur in einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und ganzen Linien unstetig ist, so erhalten wir aus der Formel (20) auf S. 90 die (bei

etwas beschränkteren Voraussetzungen über die Function $f(x, y)$ bereits auf S. 2 bewiesene Gleichung[1])

$$\int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x, y)\, dy = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx. \qquad \text{(b)}$$

4) Verhält sich die Function $f(x, y)$ wie in 3) und bezeichnen x, y die Coordinaten eines Punktes M im Rechtecke $ABA'B'$ (Fig. 1), jedoch nicht auf den Seiten AB und AB' gelegen, so hat man nach 3)

$$\left.\begin{aligned} \iint_{(ANMP)} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_a^x dx \int_b^y f(x, y)\, dy \\ &= \int_b^y dy \int_a^x f(x, y)\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Dieses Doppelintegral ist eine eindeutige Function von x und y, wofür wir kurz $F(x, y)$ schreiben. Es werde ferner festgesetzt, dass

$$F(x, b) = 0 \qquad (a \leqq x \leqq a')$$
$$F(a, y) = 0 \qquad (b \leqq y \leqq b')$$

sei. Die so erklärte Function $F(x, y)$ ist stetig in Bezug auf x und y in jedem Punkte des Rechteckes $ABA'B'$ und hat dort, wo $f(x, y)$ stetig ist, partielle Differentialquotienten 1. Ordnung nach x und nach y, nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y f(x, y)\, dy \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f(x, y)\, dx, \qquad \text{(d)}$$

was sich aus (c) kraft des 9. Satzes in X. 6 sofort ergiebt. Die Stetigkeit von $F(x, y)$ lässt sich nach IV. 9 aus diesen Formeln ableiten oder direct durch eine naheliegende Zerlegung des Doppelintegrals $F(x + \xi, y + \eta)$ nach dem 5. Satze in Nr. 7 und Anwendung des Satzes 10) auf S. 79 auf das Doppelintegral $F(x + \xi, y + \eta) - F(x, y)$ zeigen. Aus (d) schliesst man endlich mit Hilfe eben desselben Satzes, dass wenigstens für die Punkte, bei welchen $f(x, y)$ stetig ist,

1) Die Gleichung (b) gilt auch für die auf S. 73 kurz erwähnte Klasse von integrirbaren Functionen.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f(x, y)$$

ist. — Der Satz 4) enthält als besonderen Fall den 2. Satz auf S. 2.

5) „Bedeutet $f(x, y)$ die nämliche Function wie in 3) und $F(x, y)$ eine Function, welche in jedem Punkte des Rechteckes $ABA'B'$ mit Einschluss seines Umfanges stetig in Bezug auf x und y ist und einen stetigen partiellen Differentialquotienten nach x (bezw. y) besitzt, endlich wenigstens in den Punkten innerhalb dieses Rechtecks, wo $f(x, y)$ stetig ist, die Bedingung erfüllt, dass

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = f(x, y) \quad \left[\text{bezw. } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f(x, y)\right]$$

ist, so hat man

$$\iint_{(ABA'B')} f(x, y)\, dx\, dy = F(a', b') - F(a, b') - F(a', b) + F(a, b).\text{“} \quad \text{(e)}.$$

Der Satz folgt unmittelbar aus der Formel

$$\iint_{(ABA'B')} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x, y)\, dy = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\, dx$$

durch die schon auf S. 3 gegebene Rechnung.

Beispiel s. XVIII. 7 Beispiel 2).

6) „Es giebt eine und nur eine Function von x und y, welche im Punkte $x = x_0$ $y = y_0$ des Rechteckes $ABA'B'$ den vorgeschriebenen Werth c hat, bei allen seinen Punkten stetig ist und zu den partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung nach x und nach y die gegebenen, in den genannten Punkten stetigen Functionen $\varphi(x, y)$ $\psi(x, y)$ hat, welche wenigstens in den Punkten innerhalb des Rechteckes $ABA'B'$, der Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x, y) \quad \text{(f)}$$

genügen, wobei $f(x, y)$ in diesen Punkten des Rechtecks $ABA'B'$ in Bezug auf x und y stetig und in demselben endlich sein soll.“

Beweis. Setzen wir, wie oben,

$$\int\!\!\int_{(ANMP)} f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y),$$

so ist nach (d) und (f)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x, y) - \varphi(x, b) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \psi(x, y) - \psi(a, y).$$

Somit entspricht den oben gestellten Bedingungen die Function

$$c + F(x, y) - F(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, b)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(a, y)\, dy = G(x, y).$$

In der That hat man $G(x_0, y_0) = c$ und

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi(x, b) = \varphi(x, y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \psi(a, y) = \psi(x, y).$$

Dass es neben $G(x, y)$ keine andere Function giebt, welche den in Rede stehenden Forderungen Genüge leistet, schliesst man unmittelbar aus dem auf S. 135 d. I. T. Z. 22 flg. angeführten Satze.

10. Der Green'sche Satz.[1])

Kennt man eine Function, von welcher die Function unter den $\int\!\!\int$ der Differentialquotient nach einer der Veränderlichen x, y ist, so lässt sich das Doppelintegral mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Integralrechnung (X. 4) in ein einfaches verwandeln.

---

1) Der Satz ist nur ein besonderer Fall des gewöhnlich als Green'schen bezeichneten Satzes für dreifache Integrale, welchen man auf S. 24 und 121 der neuen Ausgabe der Green'schen Abhandlung über die Anwendung der mathematischen Analysis auf die Theorien der Elektricität und des Magnetismus in Ostwalds Classiker der exacten Wissenschaften (Nr. 61) angegeben findet. Vgl. auch Riemann, Werke, 1876 S. 12.

Unter allgemeineren Voraussetzungen ist der Satz von Pringsheim (Münchner Sitz.-Ber. 1899 S. 55) bewiesen.

Satz. „$\mathfrak{F}$ bezeichne ein im Endlichen liegendes ebenes Flächenstück, das von $m+1$ einfachen regulären[1]) Rändern, dem äussern $\mathfrak{r}$ und m innern, $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_m$, begrenzt sei. Fehlen die letzteren, so nehme man $m=0$. Jeden von den $m+1$ Rändern denken wir uns durch einen Punkt, dessen Coordinaten x, y als Functionen eines beständig wachsenden Parameters τ dargestellt seien, im positiven Sinne beschrieben. Es seien also für den äussern Rand die Coordinaten dieses beweglichen Punktes

$$x_\tau = \varphi(\tau) \quad y_\tau = \psi(\tau) \quad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta), \tag{a}$$

für den innern Rand $\mathfrak{r}_r$

$$\left.\begin{array}{c} x_{r,\tau} = \varphi_r(\tau) \quad y_{r,\tau} = \psi_r(\tau) \quad (\alpha_r \leqq \tau \leqq \beta_r) \\ (r = 1, 2 \ldots m), \end{array}\right\} \tag{b}$$

wobei die Intervalle (α, β), (α_r, β_r) endlich oder unendlich sein können. Sämmtliche Functionen $\varphi(\tau)$ $\psi(\tau)$, $\varphi_r(\tau)$ $\psi_r(\tau)$ sollen bei jedem Werthe τ zwischen und an den Grenzen des bezüglichen Intervalles stetig sein, und dabei, abgesehen vielleicht von einer endlichen Anzahl von diesen Werthen, in demselben endliche und stetige Differentialquotienten nach τ: $\varphi'(\tau)$ $\psi'(\tau)$, $\varphi_r'(\tau)$ $\psi_r'(\tau)$ besitzen. Die positive Drehungsrichtung in der Ebene von $\mathfrak{F}$ sei gegeben durch denjenigen Uebergang von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe, bei welchem ein rechter Winkel beschrieben wird. Also ist $\widehat{xy} = \frac{1}{2}\pi$."

„Für sämmtliche Punkte xy des Gebietes $\mathfrak{F}$ mit Einschluss der Begrenzung sei eine Function $f(x, y)$ eindeutig definirt, welche in diesem Gebiete endlich und entweder bei jedem Punkte stetig, oder doch nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und gewöhnlichen[2])

1) Der Begriff „reguläre Linie", welcher durch das sogleich erwähnte Verhalten der die Coordinaten derselben darstellenden Functionen von τ erklärt wird, ist der nämliche wie auf S. 173 d. II. T., nur ausgedehnt auf ein unendliches Intervall von τ. Hat eine von ihnen für einen Werth zwischen den Grenzen keinen vollständigen Differentialquotienten nach τ, so hat sie daselbst mindestens einseitige.

2) Diese Bedingung hinsichtlich der Linien L ist keineswegs nothwendig, sondern blos so einfach als möglich, vgl. die Bemerkung zum 3. Satze auf S. 89.

Linien L unstetig sein soll. Alsdann existirt nach Nr. 6 das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = J."$$

A) „Kennt man nun eine ebenfalls bei allen Punkten von $\mathfrak{F}$ stetige Function $F(x, y)$, deren partieller Differentialquotient nach x wenigstens in allen Punkten von $\mathfrak{F}$, wo $f(x, y)$ stetig ist, die gegebene Function $f(x, y)$ ist, so hat man

$$\left.\begin{aligned}\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = & \int_\alpha^\beta F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy_\tau}{d\tau}\, d\tau \\ & - \sum_1^m {}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} F(x_{r,\tau}, y_{r,\tau}) \frac{dy_{r,\tau}}{d\tau}\, d\tau.\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

B) Nehmen wir dagegen an, es sei eine in allen Punkten von $\mathfrak{F}$ stetige Funktion $G(x, y)$ bekannt, wofür wenigstens in den Punkten, wo $f(x, y)$ stetig ist,

$$\frac{\partial G}{\partial y} = f(x, y) \quad \text{(c*)}$$

ist, so hat man

$$\left.\begin{aligned}\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = & -\int_\alpha^\beta G(x_\tau, y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}\, d\tau \\ & + \sum_1^m {}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} G(x_{r,\tau}, y_{r,\tau}) \frac{dx_{r\tau}}{d\tau}\, d\tau.\end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

Zusatz. Als Parameter τ kann man in jeder der $m+1$ Randcurven von $\mathfrak{F}$ den von einem festen Punkte derselben aus gerechneten Bogen σ wählen. Alsdann ist nach S. 76 und 318 d. II. T.

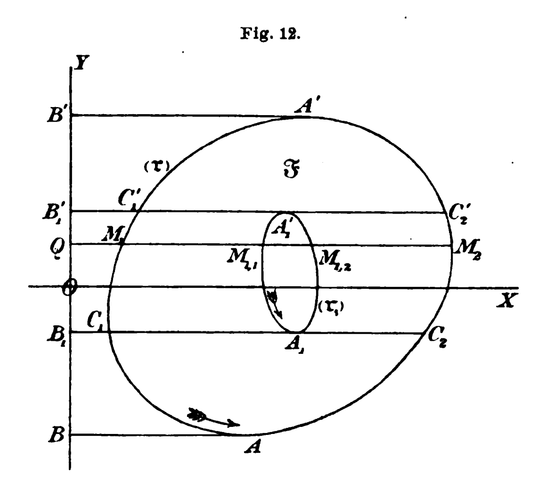
$$\frac{dx_\sigma}{d\sigma} = \cos \widehat{xt} = \sin \widehat{xn} \quad \frac{dy_\sigma}{d\sigma} = \sin \widehat{xt} = -\cos \widehat{xn},$$

worin t die nach vorwärts gerichtete Tangente der Curve $\mathfrak{r}$ und n die positive Normale dieser Curve d. i. die Richtung n, wofür $\widehat{tn} = \frac{\pi}{2}$ ist, bedeutet. Aehnliches gilt von den Differentialquotienten

$$\frac{dx_{r\sigma}}{d\sigma}, \quad \frac{dy_{r\sigma}}{d\sigma}.$$

Der **Beweis** der Sätze A) und B) bietet keine Schwierigkeit dar. Wir können uns hinsichtlich des ersteren auf die in **Fig.** 12 wiedergegebene Annahme des Gebietes $\mathfrak{F}$ beschränken. Hiernach sei es blos von zwei Rändern, dem äusseren $\mathfrak{r}$ und dem inneren $\mathfrak{r}_1$ begrenzt, und zwar sollen beide von einer Parallelen zur x-Axe höchstens in zwei Punkten geschnitten sein. Die Extreme der Ordinate der Curve $\mathfrak{r}$ seien $OB = b$ $OB' = b'$, die der Ordinate von $\mathfrak{r}_1$ $OB_1 = b_1$ $OB_1' = b_1'$.

Fig. 12.



Ist $b < y < b'$ und $y = OQ$, so möge die Parallele durch Q zur x-Axe, die Curve $\mathfrak{r}$ in den Punkten $M_1 M_2$ mit den Abscissen $x_1 = \omega_1(y)$, $x_2 = \omega_2(y)$ treffen. Und ist $b_1 < y < b_1'$, so seien die Schnittpunkte der genannten Parallelen mit der Curve $\mathfrak{r}_1$ die Punkte

$$M_{1,1} M_{1,2} \quad \text{und} \quad x_{1,1} = \omega_{1,1}(y) \qquad x_{1,2} = \omega_{1,2}(y)$$

ihre Abscissen. Dann haben wir nach dem 2. bezw. 3. Satze in Nr. 8

$$\left.\begin{aligned} J = &\int_b^{b_1} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx \\ &+ \int_{b_1}^{b_1'} dy \left\{ \int_{x_1}^{x_{1,1}} f(x, y)\,dx + \int_{x_{1,2}}^{x_2} f(x, y)\,dx \right\} \\ &+ \int_{b_1'}^{b'} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Zufolge der Beziehung

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y) \tag{f}$$

lassen sich die inneren Integrale berechnen. Es ist nach X. 4[1])

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx = F(x_2, y) - F(x_1, y)$$

$$\int_{x_1}^{x_{1,1}} f(x, y)\,dx = F(x_{1,1}, y) - F(x_1, y)$$

$$\int_{x_{1,2}}^{x_2} f(x, y)\,dx = F(x_2, y) - F(x_{1,2}, y).$$

Setzt man die Ausdrücke rechts an Stelle der bezüglichen Integrale in (e), so erscheint J als Summe von acht Integralen, nämlich

$$J = \left\{\begin{aligned} &\int_b^{b_1} F(\omega_2(y), y)\,dy + \int_{b_1}^{b_1'} F(\omega_2(y), y)\,dy \\ &\qquad + \int_{b_1'}^{b_1} F(\omega_2(y), y)\,dy \\ &-\int_b^{b_1} F(\omega_1(y), y)\,dy - \int_{b_1}^{b_1'} F(\omega_1(y), y)\,dy \\ &\qquad - \int_{b_1'}^{b'} F(\omega_1(y), y)\,dy \\ &+\int_{b_1}^{b_1'} F(\omega_{1,1}(y), y)\,dy - \int_{b_1}^{b_1'} F(\omega_{1,2}(y), y)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

---

1) Der Fundamentalsatz der Integralrechnung d. i. die Formel (1) auf S. 365 d. I. T. gilt auch dann, wenn die im Intervalle (a, b) endliche Function $f(x)$ in einer bestimmten Anzahl von Punkten $c_1 \ldots c_h$ zwischen a und b unstetig ist und die für alle Werthe von $x: a \leqq x \leqq b$ stetige Function $F(x)$ wenigstens in allen übrigen Punkten zwischen a und b der Beziehung $F'(x) = f(x)$ gehorcht. — Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet sofort ein, wenn man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_h}^{b} f(x)\,dx$$

setzt und auf jedes der Integrale rechts die erwähnte Formel anwendet. Bei der Ausführung der Addition fallen sodann die eingeschalteten Glieder $F(c_1) \ldots F(c_h)$ aus.

In den sechs Integralen der vier ersten Zeilen führen wir anstatt y die Veränderliche τ durch die Gleichung

$$y = y_\tau = \psi(\tau)$$

ein. Denken wir uns die Curve $\mathfrak{r}$ vom tiefsten Punkte A aus beschrieben, so dass zu ihm die Werthe $\tau = \alpha$ und $\tau = \beta$ gehören, und bezeichnen wir die den Punkten C_2, C_2', A', C_1', C_1 von $\mathfrak{r}$ entsprechenden Werthe des Parameters τ mit γ_2, γ_2', $\alpha', \gamma_1', \gamma_1$, so finden wir

$$\int_b^{b_1} F(\omega_2(y), y)\, dy = \int_\alpha^{\gamma_2} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}\, d\tau,$$

da $\omega_2(y_\tau) = x_\tau$ sein muss. Das zweite Integral geht in das der Function

$$F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}$$

von γ_2 bis γ_2', das dritte in das derselben Function von γ_2' bis α' über. Mithin tritt an Stelle der zwei ersten Zeilen von (g)

$$\int_\alpha^{\alpha'} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}\, d\tau. \tag{h}$$

Wir erhalten weiter

$$\int_b^{b_1} F(\omega_1(y), y)\, dy = \int_\beta^{\gamma_1} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}\, d\tau$$
$$= -\int_{\gamma_1}^{\beta} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}\, d\tau$$

und für das fünfte und sechste Integral in (g) die Integrale von

$$F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}$$

von γ_1' bis γ_1 und von α' bis γ_1', beide mit dem Zeichen — versehen, so dass die dritte und vierte Zeile von (g) durch

$$\int_{\alpha'}^{\beta} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}\, d\tau \tag{i}$$

ersetzt werden kann.

Die vier ersten Zeilen von (g) liefern somit die Summe der Integrale (h) und (i) d. i.

$$\int_\alpha^{\beta} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy\tau}{d\tau}\, d\tau.$$

Für die fünfte Zeile von (g) finden wir auf die nämliche Art, indem wir an Stelle von y durch die Gleichung

$$y = y_{1,\tau} = \psi_1(\tau)$$

den Parameter τ der Curve $\mathfrak{r}_1$ einführen, den Werth

$$-\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x_{1,\tau}, y_{1,\tau}) \frac{dy_{1,\tau}}{d\tau} d\tau.$$

Mithin ergiebt sich schliesslich

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} F(x_\tau, y_\tau) \frac{dy_\tau}{d\tau} d\tau - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x_{1,\tau}, y_{1,\tau}) \frac{dy_{1,\tau}}{d\tau} d\tau$$

w. z. b. w.

Der Satz B) lässt sich natürlich auf ähnliche Art beweisen wie der Satz A). Kürzer ist es aber, von der Gleichung (c) dadurch auf (d) überzugehen, dass man die positive y-Axe zur positiven x-Axe macht. Dann muss die der Richtung x entgegengesetzte x' als positive Ordinatenaxe gewählt werden; in der That ist $\widehat{yx'} = \frac{\pi}{2}$, während $\widehat{yx} = -\frac{\pi}{2}$ sein würde. Da $x = -x'$ zu setzen ist, so haben wir jetzt

$$J = \iint_{(\mathfrak{F})} f(-x', y)\, dy\, dx'$$

und finden dafür vermittelst der Formeln (c*) und (c) zunächst

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} G(-x_\tau', y_\tau) \frac{dx_\tau'}{d\tau} d\tau - \sum_1^m{}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} G(-x'_{r,\tau}, y_{r,\tau}) \frac{dx'_{r,\tau}}{d\tau} d\tau.$$

Hieraus folgt dann wegen der Beziehungen

$$x_\tau' = -x_\tau \qquad x'_{r,\tau} = -x_{r,\tau} \qquad (r = 1 \ldots m)$$

$$J = -\int_{\alpha}^{\beta} G(x_\tau, y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} d\tau + \sum_1^m{}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} G(x_{r,\tau}, y_{r,\tau}) \frac{dx_{r,\tau}}{d\tau} d\tau$$

d. i. die Formel (d).

11. Anwendungen des Green'schen Satzes.

1) Die Zahl für eine beliebige, von $m+1$ gewöhnlichen und regulären Rändern begrenzte ebene Fläche $\mathfrak{F}$ kann jetzt durch ein einfaches Integral dargestellt werden. Dabei seien der äussere Rand $\mathfrak{r}$

durch die Gleichungen (a), die inneren, $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_m$, durch die Gleichungen (b) gegeben. Nach S. 60 ist die Zahl der Fläche $\mathfrak{F}$

$$\mathsf{A} = \iint_{(\mathfrak{F})} dx\, dy.$$

Nun ist $f(x, y) = 1$; wir dürfen daher in (c) $F(x, y) = x$ und in (d) $G(x, y) = y$ setzen. Sonach gelangen wir zu den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A} &= \int_\alpha^\beta x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau}\, d\tau - \sum_1^m {}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} x_{r,\tau} \frac{dy_{r,\tau}}{d\tau}\, d\tau \\ \mathsf{A} &= -\int_\alpha^\beta y_\tau \frac{dx_\tau}{d\tau}\, d\tau + \sum_1^m {}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} y_{r,\tau} \frac{dx_{r,\tau}}{d\tau}\, d\tau. \end{aligned}\right\} \quad \text{(k)}$$

Addiren wir beide, so finden wir den folgenden Ausdruck für A:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A} = \frac{1}{2} &\int_\alpha^\beta \left(x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dx_\tau}{d\tau} \right) d\tau \\ - \frac{1}{2} \sum_1^m {}_r &\int_{\alpha_r}^{\beta_r} \left(x_{r,\tau} \frac{dy_{r,\tau}}{d\tau} - y_{r,\tau} \frac{dx_{r,\tau}}{d\tau} \right) d\tau. \end{aligned}\right\} \quad \text{(l)}$$

Er ändert sein Zeichen bei Vertauschung von x und y, in der That wird dadurch $-\mathsf{A}$ die Zahl für $\mathfrak{F}$, weil die früher als negativ bezeichnete Drehungsrichtung in der Coordinatenebene zur positiven gemacht wird.

Hat die Fläche $\mathfrak{F}$ nur den einen Rand $\mathfrak{r}$, so geht die Formel (l) für die Flächenzahl über in

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left(x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dx_\tau}{d\tau} \right) d\tau. \quad \text{(m)}$$

Weiteres über diesen Gegenstand s. XIX. 3. — Es ist leicht, aus der zweiten der Formeln (k) die Quadraturformel (a) in Nr. 9 abzuleiten. Man braucht nur den Rand des Gebietes $\mathfrak{F}$ in Fig. 10 (S. 82) in der hier vorgeschriebenen Form darzustellen. Man setze also im Stücke $K_1 M_1 L_1$

$$x_\tau = \tau \qquad y_\tau = \varphi_1(\tau) \qquad (a \leqq \tau \leqq a'),$$

im Stücke $L_1 L_2$

$$x_\tau = a' \qquad y_\tau = \tau - a' + \varphi_1(a') \qquad (a' \leqq \tau \leqq a' + \varphi_2(a') - \varphi_1(a')),$$

im Stücke $L_2 M_2 K_2$

$$x_\tau = 2a' + \varphi_2(a') - \varphi_1(a') - \tau \qquad y_\tau = \varphi_2(2a' + \varphi_2(a') - \varphi_1(a') - \tau)$$

$$(a' + \varphi_2(a') - \varphi_1(a') \leqq \tau \leqq 2a' - a + \varphi_2(a') - \varphi_1(a')),$$

endlich im Stücke $K_2 K_1$

$$x_\tau = a.$$

2) Der Cauchy'sche Integralsatz (vgl. XV. 4).[1])

„Unter $\mathfrak{F}$ sei dasselbe von $m+1$ einfachen, gewöhnlichen und regulären Rändern begrenzte Gebiet verstanden wie am Anfange der vorigen Nummer. Wir wollen nur, um uns an die im II. Theile gebrauchten Bezeichnungen anzuschliessen, anstatt x, y bezw. ξ, η schreiben und $\xi + \eta i = x$ setzen. Nun sei für alle Punkte x innerhalb und auf der Begrenzung der ebenen Fläche $\mathfrak{F}$ eine Function $f(x)$ der complexen Veränderlichen x eindeutig definirt, bei jedem solchen x sei sie stetig und es seien die Coordinaten von $f(x)$ $\Phi(\xi, \eta)$, $\Psi(\xi, \eta)$ d. i.

$$f(x) = \Phi(\xi, \eta) + \Psi(\xi, \eta)i. \tag{n}$$

Sie besitze ferner mindestens in allen Punkten von $\mathfrak{F}$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und den Punkten einer endlichen Anzahl von gewöhnlichen[2]) Linien einen vollständigen Differentialquotienten nach x, welcher bei jedem Punkte, wo er vorhanden ist, stetig sein soll. Hierzu ist nach II. S. 82 hinreichend, dass die Functionen $\Phi(\xi, \eta)$ $\Psi(\xi, \eta)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ mit Ausnahme der etwa ausgeschlossenen partielle Differentialquotienten nach ξ und η zulassen, dass diese bei jedem solchen Punkte stetig sind und den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \tag{p}$$

genügen. Dabei seien die Functionen

1) Die hier vorliegende Form des Cauchy'schen Integralsatzes wurde von C. Jordan (C. d'Analyse 2. éd. I S. 185) blos mit Hilfe einfacher Integrationen bewiesen.

2) Diese Bedingung ist lediglich so einfach als möglich, vgl. die Note auf S. 95. Eine allgemeinere Annahme findet man bei Pringsheim (Münchner Sitz.-Ber. 1899 S. 59).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

im ganzen Gebiete $\mathfrak{F}$ endlich. Alsdann hat man, wenn noch

$$\xi_\tau + \eta_\tau i = x_\tau \qquad \xi_{r,\tau} + \eta_{r,\tau} i = x_{r,\tau} \qquad (r = 1 \ldots m)$$

gesetzt wird,

$$\int_\alpha^\beta f(x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\,d\tau - \sum_1^m{}_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} f(x_{r,\tau})\frac{dx_{r,\tau}}{d\tau}\,d\tau = 0 \qquad \text{(q)}$$

oder, wie a. a. O. geschrieben ist,

$$\int_{(+\tau)} f(x)\,dx - \sum_1^m{}_r \int_{(+\tau_r)} f(x)\,dx = 0.\text{“} \qquad \text{(r)}$$

Der Green'sche Satz in Nr. 10 liefert den Beweis des vorstehenden Satzes unmittelbar. Da die Functionen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

im ganzen Gebiete $\mathfrak{F}$ endlich sind, so folgen nämlich aus (p) nach Nr. 6 und 7[1]) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \iint_{(\mathfrak{F})}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right) d\xi\,d\eta \\ &= \iint_{(\mathfrak{F})}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\,d\xi\,d\eta - \iint_{(\mathfrak{F})}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\,d\xi\,d\eta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(s)}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \iint_{(\mathfrak{F})}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right) d\xi\,d\eta \\ &= \iint_{(\mathfrak{F})}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\,d\xi\,d\eta + \iint_{(\mathfrak{F})}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(t)}$$

---

1) Dass die Doppelintegrale in (s) und (t) über die Functionen (p) auch in dem Falle, dass diese Functionen in einzelnen Punkten und Linien des Gebietes $\mathfrak{F}$ unstetig sind, verschwinden, ergiebt sich unmittelbar aus der Schlussbemerkung im Absatze 2) von Nr. 6. Man kann nämlich, ohne an den Doppelintegralen der genannten Functionen etwas zu ändern, die etwaigen Werthe derselben in den ausgeschlossenen Punkten und Linien durchaus durch den Werth Null ersetzen.

Nun ist nach den Formeln (c) und (d) in Nr. 10

$$\iint_{(\mathfrak{F})} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} d\xi\, d\eta = \int_\alpha^\beta \Phi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\eta_\tau}{d\tau} d\tau - \sum_1^m r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \Phi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\eta_{r,\tau}}{d\tau}$$

$$\iint_{(\mathfrak{F})} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\xi\, d\eta = -\int_\alpha^\beta \Psi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\xi_\tau}{d\tau} d\tau + \sum_1^m r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \Psi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\xi_{r,\tau}}{d\tau} d\tau$$

$$\iint_{(\mathfrak{F})} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\xi\, d\eta = -\int_\alpha^\beta \Phi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\xi_\tau}{d\tau} d\tau + \sum_1^m r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \Phi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\xi_{r,\tau}}{d\tau} d\tau$$

$$\iint_{(\mathfrak{F})} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} d\xi\, d\eta = \int_\alpha^\beta \Psi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\eta_\tau}{d\tau} d\tau - \sum_1^m r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \Psi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\eta_{r,\tau}}{d\tau} d\tau.$$

Demnach ergeben sich aus (s) und (t) die Formeln

$$0 = \int_\alpha^\beta \left[\Phi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\eta_\tau}{d\tau} + \Psi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\xi_\tau}{d\tau}\right] d\tau - \sum_1^m r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \left[\Phi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\eta_{r,\tau}}{d\tau} + \Psi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\xi_{r,\tau}}{d\tau}\right] d\tau$$

$$0 = \int_\alpha^\beta \left[\Phi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\xi_\tau}{d\tau} - \Psi(\xi_\tau, \eta_\tau) \frac{d\eta_\tau}{d\tau}\right] d\tau - \sum_1^m r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \left[\Phi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\xi_{r,\tau}}{d\tau} - \Psi(\xi_{r,\tau}, \eta_{r,\tau}) \frac{d\eta_{r,\tau}}{d\tau}\right] d\tau.$$

Multiplicirt man die erstere mit i und addirt sie zur zweiten, so erhält man die Formel (q). Es ist nämlich

$$i\left[\Phi(\xi_\tau, \eta_\tau)\frac{d\eta_\tau}{d\tau} + \Psi(\xi_\tau, \eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau}\right]$$
$$+ \Phi(\xi_\tau, \eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau} - \Psi(\xi_\tau, \eta_\tau)\frac{d\eta_\tau}{d\tau}$$
$$= [\Phi(\xi_\tau, \eta_\tau) + i\Psi(\xi_\tau, \eta_\tau)]\left[\frac{d\xi_\tau}{d\tau} + i\frac{d\eta_\tau}{d\tau}\right]$$
$$= f(x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$$

u. s. w.

Einzelne Punkte b, bei denen $f(x)$ keinen oder einen nicht stetigen vollständigen Differentialquotienten hat, können im Innern des Gebietes $\mathfrak{F}$ nicht vorkommen (vgl. II. S. 265 Note 2), wohl aber auf der Begrenzung desselben. Sind solche Punkte darauf in endlicher Anzahl vorhanden, so gilt der Cauchy'sche Integralsatz auch dann, wenn die Functionen $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ u. s. w. in ihrer Umgebung nicht endlich sind. Dies ist schon in XV. 5 bemerkt, und zwar wurde dort blos die Forderung, dass

$$\lim_{x=b}(x-b)f(x) = 0$$

ist, erhoben, welche von selbst erfüllt ist, wenn $f(x)$ bei $x = b$ stetig ist. — Eine weitere Ausdehnung des genannten Satzes s. XVIII. 17.

12. Transformation der eigentlichen Doppelintegrale durch Einführung zweier neuen Integrationsveränderlichen.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung eines Doppelintegrals bildet die Einführung zweier neuen Integrationsveränderlichen in dasselbe, weil es dadurch auch auf andere als auf die ursprünglich möglichen Weisen in ein zweimaliges Integral verwandelt werden kann. Diese Transformation eines eigentlichen Doppelintegrals in ein eigentliches ist im nachstehenden Satze beschrieben.

Satz.[1]) „Es seien $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ zwei eindeutige Functionen der Veränderlichen u, v von der Beschaffenheit,

1) Vgl. A. Harnack, Elemente d. Diff.- u. Int.-R. S. 319. O. Stolz, Math. Ann. XXVI. S. 85. C. Jordan, Traité d'Analyse I. Nr. 153. — J. A. Gmeiner (Monatshefte f. Math. Jahrg. 1893 S. 277) und E. Goursat (Darboux Bulletin A. 1894 1. p. S. 92) leiten den Satz i. T. mittelst des Green'schen her.

dass, wenn ihnen die endliche, von gewöhnlichen Rändern begrenzte Fläche Φ in der uv-Ebene zugewiesen wird, die den Werthen

$$x = \varphi(u, v) \qquad y = \psi(u, v) \tag{1}$$

entsprechenden Punkte der xy-Ebene das ebenfalls von gewöhnlichen Rändern begrenzte Gebiet $\mathfrak{F}$ des vorgelegten, eigentlichen Doppelintegrals

$$J = \int\int_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy$$

einmal beschreiben, d. h. es soll nicht nur jedem Werthsysteme u, v ein Werthsystem x, y entsprechen, sondern auch jedem System x, y ein System u, v und falls dieses innerhalb Φ liegt, nur dieses eine System.[1]) Bei jedem Punkte u, v des Bereiches Φ, sowohl innerhalb als auch auf der Begrenzung desselben, seien nicht allein die Functionen

$$\varphi(u, v), \qquad \psi(u, v),$$

sondern auch ihre partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung nach u und v stetig in Bezug auf u und v. Wenn ausserdem die Functional- oder Jacobi'sche Determinante

$$J(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

innerhalb Φ ihr Zeichen nicht ändert und höchstens in einzelnen Punkten von Φ verschwindet (vgl. Nr. 13), so hat man

$$J = \iota \int\int_{(\Phi)} f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} J(u, v)\, du\, dv, \tag{2}$$

worin ι gleich $+1$ oder -1 ist. Und zwar hat man ι so zu wählen, dass das Product $\iota J(u, v)\, du\, dv$ das Zeichen von $\mathfrak{F}$ (oder $dx\, dy$) bekommt."

Zusatz. $du\, dv$ und Φ haben dasselbe Zeichen, folglich sind $\iota J(u, v)\Phi$ und $\mathfrak{F}$ gleichbezeichnet, wobei unter $\mathfrak{F}$ und Φ

---

1) Einem Punkte x, y der Begrenzung $\mathfrak{F}$ können mehrere, ja unzählig viele Werthsysteme u, v entsprechen. So entspricht bei der Transformation durch Polarcoordinaten (S. 113) dem Anfangspunkte $x = 0$ $y = 0$ jedes Werthsystem $r = 0$, θ beliebig d. i. die ganze Axe $r = 0$ in der $r\theta$-Ebene.

zugleich die Zahlen der beiden Gebiete verstanden sein sollen. Geben wir Φ jeweils das Zeichen von $\mathfrak{F} \, . \, J(u, v)$, so ist dann in (2) stets $\iota = 1$ zu setzen.

Beweis. Wenn der kleinste und grösste Werth der Abscissen der Punkte des Gebietes Φ in der uv-Ebene mit α und α', der kleinste und grösste Werth der Ordinaten derselben mit β und β' bezeichnet werden, so theilen wir $\alpha' - \alpha$ in m, $\beta' - \beta$ in n Theile, und zwar sei

$$\alpha' - \alpha = d_1 + d_2 + \cdots + d_m \qquad \beta' - \beta = e_1 + e_1 + \cdots + e_n. \tag{3}$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = \alpha \qquad \alpha_1 = \alpha + d_1, \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + d_2 \ldots \alpha' = \alpha_m = \alpha_{m-1} + d_m \\ &\beta_0 = \beta \qquad \beta_1 = \beta + e_1, \qquad \beta_2 = \beta_1 + e_2 \ldots \beta' = \beta_n = \beta_{n-1} + e_n. \end{aligned}$$

Construiren wir in der xy-Ebene das System der Curven

$$x = \varphi(\alpha_r, v) \qquad y = \psi(\alpha_r, v) \qquad (r = 0, 1 \ldots m), \tag{4}$$

wobei u constant und zwar gleich einem der $m + 1$ Werthe α_r ist, und das System der Curven

$$x = \varphi(u, \beta_s) \qquad y = \psi(u, \beta_s) \qquad (s = 0, 1 \ldots n), \tag{5}$$

wobei v constant und zwar gleich einem der $n + 1$ Werthe β_s ist. Der Kürze halber wollen wir die ersteren u-Curven, die letzteren v-Curven nennen. Von den Schnittpunkten je einer u-Curve mit je einer v-Curve liegt höchstens einer innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$. Es sei

$$\varphi(\alpha_r, \beta_s) = a_{r,s} \qquad \psi(\alpha_r, \beta_s) = b_{r,s}$$

und $A_{r,s}$ der Punkt in der xy-Ebene, welcher diese Coordinaten hat. Wir betrachten nun die geradlinigen Vierecke

$$A_{r-1,\, s-1} \, A_{r,\, s-1} \, A_{r,\, s} \, A_{r-1,\, s} \tag{6}$$

und zwar alle, zu welchen Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören. Sie überziehen das Gebiet $\mathfrak{F}$; dabei convergirt ein jedes von ihnen zugleich mit dem bezüglichen d_r und e_s zur Null.

Die Vierecke (6) werden nach dem folgenden Verfahren berechnet. Verstehen wir unter $MM'M''M'''$ bezw. die Punkte der xy-Ebene mit den Coordinaten

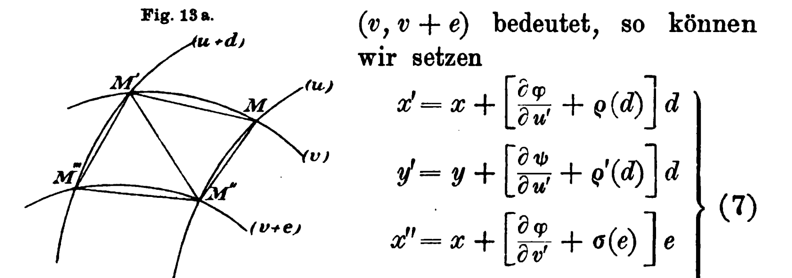
$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) & y &= \psi(u, v), \\ x' &= \varphi(u + d, v) & y' &= \psi(u + d, v), \\ x'' &= \varphi(u, v + e) & y'' &= \psi(u, v + e), \\ x''' &= \varphi(u + d, v + e) & y''' &= \psi(u + d, v + e) \end{aligned}$$

(Fig. 13a), construiren das einfache Viereck $MM'M'''M''$ und ziehen $M'M''$, so haben wir

$$MM'M'''M'' = MM'M'' + M''M'M'''$$

und zwar mit Rücksicht auf das Zeichen dieser Flächen. Wenn dann u' einen beliebigen Werth im Intervalle $(u, u + d)$, v' einen solchen im Intervalle $(v, v + e)$ bedeutet, so können wir setzen

Fig. 13a.



$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u'} + \varrho(d)\right] d \\ y' &= y + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u'} + \varrho'(d)\right] d \\ x'' &= x + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v'} + \sigma(e)\right] e \\ y'' &= y + \left[\frac{\partial \psi}{\partial v'} + \sigma'(e)\right] e, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wobei ϱ und ϱ' zugleich mit d, σ und σ' zugleich mit e gleichmässig für alle Werthsysteme u, v des Gebietes Φ zur Null convergiren. Es ist nämlich nach dem Mittelwerthsatze

$$x' - x = \varphi_u'(u + \theta d, v)\, d \qquad (0 < \theta < 1),$$

also nach (7)

$$\varrho(d) = \varphi_u'(u + \theta d, v) - \varphi_u'(u', v').$$

Vermöge der Stetigkeit von $\varphi_u'(u, v)$ im Gebiete Φ mit Einschluss von dessen Begrenzung lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, dass

$$|\, \varphi_u'(u'', v) - \varphi'(u', v') \,| < \varepsilon$$

ist, wenn nur $|\, u'' - u' \,| < \delta$ und $|\, v - v' \,| < \delta$ ist, mögen (u', v') (u'', v) was immer für Punkte des Gebietes Φ sein (vgl. S. 69). Da nun $|\, u + \theta d - u' \,|$ jedenfalls kleiner als $|\, d \,|$ und $|\, v' - v \,| < |\, e \,|$ ist, so finden wir, wenn nur $|\, d \,|$ und $|\, e \,|$ kleiner als δ gewählt werden, $|\, \varrho(d) \,| < \varepsilon$, und zwar

welcher Punkt (u, v) von Φ auch betrachtet werden mag. — Auf ähnliche Weise ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} x''' = x' + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v'} + \Sigma(d, e)\right] e & y''' = y' + \left[\frac{\partial \psi}{\partial v'} + \Sigma'(d, e)\right] e \\ x''' = x'' + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u'} + \mathsf{P}(d, e)\right] d & y''' = y'' + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u'} + \mathsf{P}'(d, e)\right] e, \end{array}\right\} \quad (8)$$

wobei jede der vier Zahlen P, P', Σ, Σ' bei $\lim d = 0$ und $\lim e = 0$ gleichmässig für alle Punkte u, v des Gebietes Φ zur Null convergirt.

Nun ist bekanntlich, wenn $\hat{xy} = \pi : 2$ ist,

$$2MM'M'' = (x' - x)(y'' - y) - (x'' - x)(y' - y),$$

also nach (7)

$$= \{J(u', v') + R(d, e)\} de.$$

Aehnlich hat man

$$2M''M'M''' = (x''' - x'')(y''' - y') - (x''' - x')(y''' - y''),$$

also nach (8)

$$= \{J(u', v') + S(d, e)\} de.$$

Demnach ist

$$MM'M'''M'' = \left[J(u', v') + \frac{1}{2}\{R(d, e) + S(d, e)\}\right] de. \quad (9)$$

$R(d, e)$ ist eine ganze Function von $\varrho\varrho'\sigma\sigma'$ ohne constantes Glied, $S(d, e)$ eine ebensolche von $\mathsf{P}\mathsf{P}'\Sigma\Sigma'$. R und S, sowie auch $\frac{1}{2}(R + S)$, convergiren daher bei $\lim d = 0$ $\lim e = 0$ gleichmässig für alle Punkte des Gebietes Φ zur Null, d. h. es entspricht jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$\frac{1}{2} \left| R(d, e) + S(d, e) \right| < \varepsilon \quad (10)$$

ist, wenn nur $|d|$ und $|e|$ kleiner als δ sind, mag u, v was immer für ein Punkt von Φ sein. Wenn $J(u, v)$ nicht verschwindet, so hat das Viereck $MM'M'''M''$ bei gehörig kleinem $|d|$ und $|e|$ das innerhalb Φ unveränderliche Zeichen von $J(u, v)\, de$; man muss also $MM'M'''M''$ noch mit einem Factor $\iota = \pm 1$ multipliciren, um eine mit $\mathfrak{F}$ gleichbezeichnete Fläche zu erhalten.

Verstehen wir unter $\tau_{r,s}$ das mit ι multiplicirte Viereck (6), unter u_r irgend einen Werth des Intervalles (α_{r-1}, α_r) und unter v_s irgend einen des Intervalles (β_{s-1}, β_s) und setzen

$$\varphi(u_r, v_s) = x_{r,s} \qquad \psi(u_r, v_s) = y_{r,s},$$

so haben wir

$$J = \lim_{\tau_{r,s}=0} \sum_{r,s} f(x_{r,s}, y_{r,s}) \tau_{r,s}, \tag{11}$$

die Summe bezogen auf alle Vierecke $\tau_{r,s}$, zu denen Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören. Wenden wir nun auf $\tau_{r,s}$ die Formel (9) an, setzen $u' = u_r$, $v' = v_s$ und schreiben statt $\frac{1}{2}(R + S)$, bezogen auf die Werthe $u = \alpha_{r-1}$, $v = \beta_{s-1}$, kurz $\mathsf{T}_{r,s}$, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r,s} f(x_{r,s}, y_{r,s}) \tau_{r,s} \\ = \iota &\sum_{r,s} f\{\varphi(u_r, v_s), \psi(u_r, v_s)\} J(u_r, v_s) d_r e_s \\ + \iota &\sum_{r,s} f(x_{r,s}, y_{r,s}) \mathsf{T}_{r,s} d_r e_s. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite von (12) hat bei $\lim d_r = 0$ $(r = 1 \ldots m)$ $\lim e_s = 0$ $(s = 1 \ldots n)$ den Grenzwerth Null. In der That ist ihr Betrag, wenn nur jedes $|d_r|$ und jedes $|e_s|$ kleiner als δ ist, nach (10) kleiner als

$$C\varepsilon \sum_{r,s} |d_r, e_s| \leqq C\varepsilon\, |\alpha' - \alpha|\; |\beta' - \beta|,$$

unter C die endliche obere Grenze von $|f(x, y)|$ im Bereiche $\mathfrak{F}$ verstanden. Somit erhalten wir aus (11) und (12) die Formel

$$J = \lim_{d_r = 0\; e_s = 0} \iota \sum_{r,s} f\{\varphi(u_r, v_s), \psi(u_r, v_s)\} J(u_r, v_s) d_r e_s. \tag{13}$$

Diese Gleichung besagt nach dem 3. Satze in Nr. 5, dass die Function

$$f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} J(u, v)$$

ein Doppelintegral besitzt über das Gebiet Φ, von dem wir ja ausdrücklich angenommen haben, dass seine Begrenzung sowohl mit jeder Parallelen zur x-, als auch mit jeder zur y-Axe höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein habe. Wir dürfen daher anstatt (13) schreiben

$$J = \iota \iint_{(\Phi)} f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} J(u, v)\, du\, dv.$$

Ist z. B. $f(x, y) = 1$, so haben wir demnach

$$\iint_{(\mathfrak{F})} dx\,dy = \iota \iint_{(\Phi)} J(u, v)\,du\,dv, \tag{14}$$

finden also einen neuen Ausdruck für die Zahl der Fläche $\mathfrak{F}$ (S. 60).

Gerade so wie das einfache Integral (vgl. X. 15) muss auch das Doppelintegral vor der Einführung neuer Integrationsveränderlichen manchmal zerlegt werden. Beispiele davon findet man in XIX. 9 und 19.

13. Ueber das identische Verschwinden der Functionaldeterminante von zwei Functionen zweier Veränderlichen.

Satz. „Wenn die Functionen $x = \varphi(u, v)$ $y = \psi(u, v)$ für alle Punkte u, v innerhalb einer beliebigen Fläche Φ der uv-Ebene holomorph (II. S. 208) sind und es ist $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ $\left(\text{oder } \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$ für keinen von ihnen Null, während die Functionaldeterminante $J(u, v)$ in jedem von ihnen verschwindet, so ist y mindestens für die unter diesen Umständen durch die Gleichung $x = \varphi(u, v)$ bestimmten Werthe von x eine analytische Function von x."

Beweis. Bezeichnet u', v' irgend einen Punkt innerhalb Φ, so lassen sich zufolge der Voraussetzung x und y in einer gewissen Umgebung desselben als Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $u - u'$ und $v - v'$ darstellen. Nehmen wir an, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial v'}$ nicht verschwindet, und setzen

$$x' = \varphi(u', v') \qquad y' = \psi(u', v'),$$

so lässt sich die Gleichung $x = \varphi(u, v)$ nach v durch eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ und $u - u'$, welche für $x = x'$, $u = u'$ den Werth v' liefert, auflösen (IV. 16):

$$v = v' + \mathfrak{R}(x - x', u - u'). \tag{a}$$

Dabei hat man

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}. \tag{b}$$

Denkt man sich die Reihe (a) für v in $\psi(u, v)$ eingesetzt, so erscheint y als convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ und $u - u'$ also

$$y = y' + \mathfrak{S}(x - x', u - u').$$

Dafür ist nach (b)

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial u} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \psi}{\partial v}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

somit ist, weil $J(u, v) = 0$ sein soll,

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Daher enthält die Reihe $\mathfrak{S}(x-x', u-u')$ kein Glied mit $u-u'$, was unmittelbar aus dem Identitätssatze für Potenzreihen der beiden Argumente $x-x'$, $u-u'$ sich ergiebt, indem x, u alle Werthe in einer gewissen Umgebung der Stelle x', u' annehmen dürfen. Es kommen also in der Reihe $\mathfrak{S}$ nur Potenzen von $x-x'$ vor, sie bildet also das Element für eine Function von x. Alle auf diesem Wege für y erhältlichen Potenzreihen gehören zu einer monogenen Function $\omega(x)$ von x. weil man irgend zwei Punkte u', v'; u'', v'' innerhalb Φ selbst durch eine reelle, nämlich völlig innerhalb Φ verlaufende Linie, auf welcher $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ nirgends verschwindet, verbinden kann.

14. Besondere Substitutionen für die Integrationsveränderlichen x, y in einem Doppelintegral.

1) Wenn in den Gleichungen (1) auf S. 106 x blos von u und y blos von v abhängt, also $x=\varphi(u)$, $y=\psi(v)$ gesetzt wird, so hat man

$$J(u, v)=\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{d\psi}{dv}.$$

Es genügt aber nicht, dass $J(u, v)$ innerhalb des neuen Integrationsgebietes Φ sein Zeichen nicht ändert, sondern es darf weder $\frac{d\varphi}{du}$, noch $\frac{d\psi}{dv}$ sein Zeichen innerhalb Φ ändern. Denn gäbe es innerhalb Φ einen solchen Punkt $u_0 v_0$, dass der erstere Differentialquotient bei $u=u_0$, der letztere bei $v=v_0$ sein Zeichen wechselt, so müsste es innerhalb $\mathfrak{F}$ Punkte x, y geben, denen zwei Punkte u, v von Φ entsprechen, was ja nicht der Fall sein soll.

2) Für die ganze lineare Substitution

$$x=\alpha u+\beta v+\gamma \qquad y=\alpha' u+\beta' v+\gamma' \tag{1}$$

hat man $J(u, v)=\alpha\beta'-\beta\alpha' (=\Delta)$, welche Zahl von Null verschieden sein muss. Die xy-Ebene heisst eine affine Abbildung der uv-Ebene. Die u-Curven sind die Geraden

$$\beta' x-\beta y=\Delta u+\beta'\gamma-\beta\gamma', \tag{2}$$

sämmtlich parallel zur Geraden $\beta' x-\beta y=0$; die v-Curven die Geraden

$$\alpha' x-\alpha y=-\Delta v+\alpha'\gamma-\alpha\gamma', \tag{3}$$

sämmtlich parallel zur Geraden $\alpha' x-\alpha y=0$. Durch diese beiden Parallelenbüschel wird das Gebiet $\mathfrak{F}$ mit Parallelo-

grammen überzogen. — Stehen die Geraden (2) und (3) aufeinander senkrecht, d. h. ist $\alpha\beta + \alpha'\beta' = 0$, so gehört die Substitution (1) auch zur folgenden Art.

3) Wenn jede u-Curve durch jede v-Curve rechtwinklig geschnitten wird (die v-Curven also die orthogonalen Trajectorien der u-Curven sind), so heisst die Substitution

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \tag{4}$$

orthogonal. Dann muss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\,\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \tag{5}$$

sein. In der That hat man nach XII. 6 für die vorwärts gerichtete Tangente t der u-Curve

$$\cos \hat{xt} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2} \quad \sin \hat{xt} = \frac{\partial \psi}{\partial v} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2}$$

und für die der v-Curve, t',

$$\cos \hat{xt'} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{d u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2} \quad \sin \hat{xt'} = \frac{\partial \psi}{\partial u} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2};$$

woraus, da $\cos \hat{tt'} = \cos(\hat{xt'} - \hat{xt}) = 0$ sein soll, unmittelbar die Gleichung (5) folgt. Zufolge der Identität

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\,\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2\right]$$

ergiebt sich, dass nunmehr

$$J(u, v)^2 = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2\right] \tag{6}$$

ist. — Besondere Fälle der orthogonalen Substitution sind:

a) die Einführung der Polarcoordinaten durch die Formeln

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (r \geqq 0), \tag{7}$$

wofür

$$J(r, \theta) = r \tag{8}$$

gefunden wird. Die r-Curven sind die Geraden

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0$$

durch den Anfangspunkt (Fig. 13b), die θ-Curven die Kreise $x^2+y^2=r^2$, von ihm als Mittelpunkt aus beschrieben. Diese beiden Curvensysteme, der Strahlbüschel O und die Kreise vom Mittelpunkte O theilen die Ebene in Vierecke, deren jedes von zwei Geraden und zwei concentrischen Kreisbogen begrenzt wird.

Anwendungen s. XVIII. 9, 4) und 19, 2), ferner XIX. 6, 5).

b) Die Abbildung der xy-Ebene mittelst reciproker Radienvectoren auf die mit ihr vereinigte uv-Ebene mit dem Anfangspunkte O' und den Axen $O'U \parallel OX$,

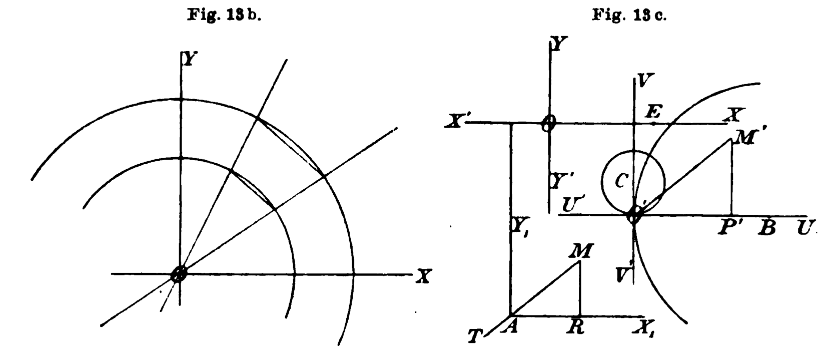


Fig. 13b. Fig. 13c.

$O'V \parallel OY$. Sie ist dadurch erklärt, dass, wenn M einen Punkt x, y und M' den ihm entsprechenden u, v bezeichnet, ferner A einen festen Punkt mit den Coordinaten a, b in der xy-Ebene, alsdann erstens $AM^2 \cdot O'M'^2 = 1$ und zweitens die Strecken AM und $O'M'$ parallel und zwar gleichgerichtet sein sollen (Fig. 13c). Die erste Bedingung liefert die Gleichung

$$\{(x-a)^2+(y-b)^2\}\{u^2+v^2\}=1, \tag{9}$$

die zweite vermöge der einstimmigen Aehnlichkeit der Dreiecke $O'P'M$ und ARM, worin $AX_1 \parallel OX$ und $TAM \parallel O'M'$ ist,

$$\frac{AR}{O'P'}=\frac{RM}{P'M'}=\frac{AM}{O'M'}=\omega \text{ d. i. } \frac{x-a}{u}=\frac{y-b}{v}=\omega \quad (\omega>0). \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt

$$\omega^2(u^2+v^2)^2=1 \text{ alo } \omega=1:(u^2+v^2)=1:O'M'^2. \tag{11}$$

Somit ist $AM \cdot O'M' = 1 = OE^2$, wenn OE die Längeneinheit vorstellt. Bei gegebenem M' findet man also AM

durch die Proportion $O'M':OE = OE:AM$. Wir finden ferner nach (10)

$$x - a = \frac{u}{u^2 + v^2} \qquad y - b = \frac{v}{u^2 + v^2} \tag{12}$$

und damit die Formel

$$J(u, v) = -1 : (u^2 + v^2)^2.$$

Lösen wir aber die Gleichungen (9) und (10) nach u und v auf, so erhalten wir mit Hilfe von (11)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x-a}{\omega} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ v &= \frac{y-b}{\omega} = \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \end{aligned}\right\}. \tag{12*}$$

Die u-Curve ist also ein Kreis, welcher durch den Punkt A geht und dessen Mittelpunkt die Coordinaten $a + 1 : 2u$, b hat, also auf der Geraden AX_1 liegt. Dem Werthe $u = 0$ entspricht jedoch die Gerade $x - a = 0$ d. i. AY_1. Dagegen sind die v-Curven Kreise, welche ebenfalls durch den Punkt A gehen, deren Mittelpunkte aber auf der Geraden $AY_1 \parallel OY$ liegen, einschliesslich der Geraden AX_1, welche zu $v = 0$ gehört. Somit schneidet jeder Kreis der ersten Schaar jeden der zweiten rechtwinklig.

Betrachtet man anstatt der Substitution (12) die folgende

$$x - a = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad y - b = -\frac{v}{u^2 + v^2},$$

welche ebenfalls zu den orthogonalen gehört, und setzt

$$x + yi = z \quad a + bi = c \quad u + vi = w, \tag{13}$$

so kann man sie auch in der Form

$$z - c = \frac{u - vi}{u^2 + v^2} = \frac{1}{u + vi} = \frac{1}{w} \tag{14}$$

darstellen, woraus hervorgeht, dass sie zu den isogonalen gehört.

c) Lässt man nämlich $z = x + yi = g(w)$ sein, wo $g(w)$ eine eindeutige Function der complexen Veränderlichen $w = u + vi$ ist, die einen vollständigen Differentialquotienten nach w besitzt, so erhält man eine isogonale Abbildung der z- oder xy-Ebene auf sich selbst, welche ebenfalls zu einer orthogonalen Substitution für x und y führt.

In der That, ist $g(u+vi)=\varphi(u, v)+\psi(u, v)i$, so muss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial v} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{\partial \psi}{\partial u} \tag{15}$$

sein (II. S. 83), so dass die Gleichung (5) für diese Substitution

$$x=\varphi(u, v) \quad y=\psi(u, v)$$

besteht.

Wenn aber von einem Punkte u, v zwei Curven mit den Gleichungen

$$u=u'_t \quad v=v'_t, \quad u=u''_t \quad v=v''_t \tag{16}$$

ausgehen, wobei in beiden zum Werthe $t=0$ jener Punkt u, v gehören soll, so bilden die ihnen entsprechenden

$$\left.\begin{array}{ll} x=\varphi(u'_t, v'_t) & y=\psi(u'_t, v'_t), \\ x=(\varphi u''_t, v''_t) & y=\psi(u''_t, v''_t) \end{array}\right\} \tag{17}$$

im Punkte $x=\varphi(u, v)$ $y=\psi(u, v)$ denselben Winkel wie die Curven (16) im Punkte uv. Werden nämlich die nach vorwärts gerichteten Tangenten der Curven (16) im Punkte u, v bezw. mit $\mathfrak{t}', \mathfrak{t}''$, die der Curven (17) in dem ihm entsprechenden Punkte x, y mit $\mathfrak{T}'\,\mathfrak{T}''$ bezeichnet, so leitet man aus der Gleichung

$$\mathfrak{T}'\hat{}\mathfrak{T}''=x\hat{\mathfrak{T}}''-x\hat{\mathfrak{T}}'$$

mit Hilfe der Ausdrücke für $\cos x\hat{\mathfrak{T}}'$ $\sin x\hat{\mathfrak{T}}'$, $\cos x\hat{\mathfrak{T}}''$ $\sin x\hat{\mathfrak{T}}''$, welche nach den Formeln (h) in XII. 6 zu berechnen sind, ohne Mühe die Beziehungen

$$\cos \mathfrak{T}'\hat{}\mathfrak{T}''=\cos \mathfrak{t}'\hat{}\mathfrak{t}'' \qquad \sin \mathfrak{T}'\,\mathfrak{T}''=\sin \mathfrak{t}'\hat{}\mathfrak{t}''$$

her. Es darf jedoch $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$ nicht verschwinden, d. h. der Punkt u, v nicht singulär sein.

Für die isogonale Abbildung ist

$$J(u, v)=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2,$$

also, wenn der Punkt u, v nicht singulär ist, stets positiv.

d) Die Einführung der elliptischen Coordinaten mittelst der Gleichungen

$$\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2-e^2}-1 \qquad \frac{x^2}{v^2}+\frac{y^2}{v^2-e^2}=1. \tag{18}$$

Dabei denkt man sich den Punkt x, y auf einen, z. B. den ersten Quadranten der xy-Ebene beschränkt und u, v als nicht negative Zahlen, und zwar $u \geq e$, $v \leq e$. Die u-Curven sind alsdann confocale Ellipsen, die v-Curven confocale Hyperbeln mit denselben Brennpunkten wie die Ellipsen,

welche von ihnen rechtwinklig geschnitten werden. Löst man die Gleichungen (18) nach x^2 und y^2 auf und zieht die Quadratwurzel, so gelangt man zu den Formeln

$$x = \frac{uv}{e} \quad y = \frac{1}{e}\sqrt{u^2 - e^2} \cdot \sqrt{e^2 - v^2}.$$

Endlich mögen noch einige Substitutionen erwähnt werden, welche nicht zu den orthogonalen gehören.

4) Die häufig als Ivory'sche bezeichnete Substitution

$$x = a\varrho \cos\psi \quad y = b\varrho \sin\psi \tag{19}$$

mit der Functionaldeterminante $ab\varrho$. a und b sind positive Constante, und zwar ist $a > b$, ϱ ist $\geqq 0$. Bei constantem ϱ bestimmen die Gleichungen (19) die Ellipse

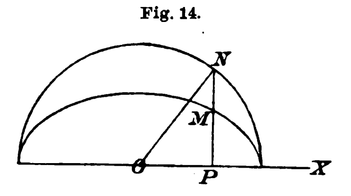
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varrho^2, \tag{20}$$

welche der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ähnlich und zu ihr ähnlich gelegen ist, bei constantem ψ die Strahlen $y = xb \tan\psi : a$ durch den Anfangspunkt. Zu einem gegebenen Punkte M (x, y) bedeutet ψ den excentrischen Winkel der Ellipse (20), d. i. errichtet man über ihrer grossen Axe einen Kreis (Fig. 14) und verlängert Ordinate PM, bis sie denselben schneidet, was in N stattfinden möge, so ist $\psi = X\hat{O}N$, durchläuft also, während M die Ellipse im positiven Sinne beschreibt, alle Werthe von $-\pi$ bis π.

Fig. 14.



5) Die Substitution

$$x = u(1 - v) \quad y = uv$$

in XVIII. 17.

6) Die Substitution

$$x = u^\mu v^\nu \quad y = u^\nu v^\mu \quad (\mu > 0,\ \nu > 0,\ \mu \gtrless \nu)$$

mit der Determinante

$$J(u, v) = (\mu^2 - \nu^2)(uv)^{\mu + \nu - 1},$$

wobei uv nicht negativ werden sollen. Die u-Curven und die v-Curven haben bezw. die Gleichungen

$$y^\nu = u^{\nu\nu - \mu\mu} x^\mu \quad y^\mu = v^{\mu\mu - \nu\nu} x^\nu.$$

Ist $\mu + \nu = 1$, so wird $J(uv) = 2\mu - 1$, somit gleich einer Constanten. Dies tritt z. B. ein für $\mu = 1:3$, $\nu = 2:3$, in welchem Falle als u-Curven und v-Curven die Parabeln

$$y^2 = ux \quad y = x^2 : v$$

auftreten.

15. Ueberblick über die Lehre von den drei- und mehrfachen Integralen.

Die in den Nr. 1—7 aufgestellten Begriffe und die darin vorgeführten Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf mehrdimensionale Bereiche und dafür erklärte Functionen übertragen. Man hat nur die Elementarbereiche $\tau_1 \ldots \tau_n$ in geeigneter Weise festzusetzen.

Was zunächst einen dreidimensionalen Bereich im Euclid'schen Raume betrifft, so brauchen wir uns unter den $\tau_1 \ldots \tau_n$ lediglich Prismen von einerlei Stellung der Grundflächen und einerlei Richtung der Seitenkanten vorzustellen. Denn schon die Zahl des Tetraëders lässt sich in erschöpfender Weise nur durch eine der in Nr. 3—4 gegebenen ähnliche Grenzbetrachtung begründen. Es tritt demnach an Stelle des 2. Satzes in Nr. 2* die Formel für den Inhalt des Körpers, der von zwei Prismen-Oberflächen begrenzt wird, welche die eines gegebenen Prismas von aussen und innen umgeben und davon überall den nämlichen Abstand haben. Aus dem 1. Satze in Nr. 2* leitet man ferner unmittelbar eine obere Grenze für die Summe aller jener Prismen her, welche mindestens je einen Punkt mit der Begrenzung des Bereiches gemein haben.

Auf diese Art gelangt man insbesondere zu den Zahlen beliebig begrenzter Körper (vgl. XIX. 4), in erster Linie zu der des Tetraëders. Dann empfiehlt sich die Wiederholung der soeben skizzirten Betrachtungen unter der Voraussetzung, dass die Polyeder $\tau_1 \ldots \tau_n$ nunmehr auch Tetraëder sein dürfen. Ist dies geschehen, so lässt sich nämlich die Transformation der dreifachen Integrale nach demselben Verfahren erledigen, welches auf die Doppelintegrale in Nr. 12 angewendet wurde.

Bevor wir zur Erklärung des allgemeinen m-fachen Integrals schreiten, haben wir den endlichen stetigen Bereich

von m Dimensionen zu erklären.[1]) Als ein solcher wird ein System von Punkten $x_1 x_2 \ldots x_m$ unter den folgenden Bedingungen bezeichnet. 1) Die zu sämmtlichen Punkten desselben gehörigen Werthe einer und derselben Coordinate, d. i. die von x_1, die von $x_2 \ldots$ und endlich die von x_m, liegen zwischen zwei endlichen Grenzen. 2) Das System ist vollständig (vgl. Nachtrag I). 3) Unter den Systempunkten soll es Innenpunkte geben, d. h. Punkte, wovon jeder eine gewisse aus Systempunkten bestehende Umgebung (s. u.) besitzt. (Alle nicht dem Systeme angehörigen Punkte der Mannigfaltigkeit $x_1 \ldots x_m$ heissen Aussenpunkte desselben.) 4) Bedeuten $A \equiv (a_1 \ldots a_m)$ und $B \equiv (b_1 \ldots b_m)$ irgend zwei Punkte des Systems und ist ε eine beliebige gegebene positive Zahl, so lässt sich zwischen A und B eine aus Innenpunkten des Systems in endlicher Anzahl $A_1 \ldots A_n$ gebildete Kette in der Art einschalten, dass A_1 zur Umgebung ε von A, A_2 zur Umgebung ε von A_1 u. s. w., A_n zur Umgebung ε von A_{n-1} und endlich B zur Umgebung ε von A_n gehört. Dabei wird unter der Umgebung ε eines Punktes $x_1^0 \ldots x_m^0$ die Gesammtheit aller Punkte $x_1 \ldots x_m$ verstanden, wofür x_1 irgend einen Werth zwischen $x_1^0 - \varepsilon$ und $x_1^0 + \varepsilon \ldots x_m$ irgend einen Werth zwischen $x_m^0 - \varepsilon$ und $x_m^0 + \varepsilon$ hat.

Ist nun für alle Punkte eines endlichen und stetigen Bereiches $\mathfrak{B}$ von m Dimensionen eine dafür endliche Function $f(x_1 \ldots x_m)$ gegeben, so lassen wir, um die Entwickelungen von Nr. 3 darauf auszudehnen, die Theile $\tau_1 \ldots \tau_n$ des Gebietes $\mathfrak{B}$ blos Bereiche von der folgenden Art sein. Es sei ein jeder von ihnen die Gesammtheit aller Punkte

$$X_1, X_2 \ldots X_m,$$

deren jede Coordinate $X_k (k = 1 \ldots m)$ alle Werthe eines gegebenen Intervalles $(x_k, x_k + dx_k)$ annehmen darf, und das ihm zugehörige τ sei das Product $dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m$, welches im Euclid'schen Raume von m Dimensionen als der ihm zukommende Inhalt bezeichnet wird. — Anstatt des 2. Satzes in Nr. 2* braucht man dann nur die Entwickelung der Differenz

1) Nach Weierstrass und C. Jordan (C. d'Analyse I. Nr. 31).

$$(dx_1 + 2H)(dx_2 + 2H)\dots(dx_m + 2H)$$
$$-(dx_1 - 2H)(dx_2 - 2H)\dots(dx_m - 2H)$$

nach Potenzen von H.

Das m-fache Integral

$$\mathcal{S}_{(\mathfrak{B})} f(x_1 \dots x_m)\, dx_1 \dots dx_m$$

ist im Falle, dass es existirt, der folgende Grenzwerth J. Durchläuft x_k im Bereiche $\mathfrak{B}$ alle Werthe des Intervalles (a_k, a_k'), so zerlegt man $a_k' - a_k$ in beliebig viele (m_k) Theile:

$$a_k' - a_k = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \cdots + \delta_{k,m_k} \qquad (a_k < a_k')$$

und setzt $a_k = a_{k0}$,

$$a_k + \delta_{k1} = a_{k1}$$
$$a_{k1} + \delta_{k2} = a_{k2}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{k,m_k-1} + \delta_{k,m_k} = a_{k,m_k} = a_k'.$$

Bezeichnet $x_{k,r}$ einen beliebigen Werth im Intervalle

$$(a_{k,r-1}, a_{k,r}) \qquad (r = 1 \dots m_k),$$

so bildet man die Summe

$$S = \Sigma f(x_{1,r_1} \dots x_{m,r_m})\, \delta_{1,r_1} \dots \delta_{m,r_m},$$

ausgedehnt über alle Bereiche $\delta_{1,r_1} \dots \delta_{m,r_m}$, in welchen überhaupt Punkte von $\mathfrak{B}$ vorkommen. Dann soll jedem $\varkappa > 0$ ein $\lambda > 0$ sich so zuordnen lassen, dass stets

$$|\, S - J \,| < \varkappa$$

ist, wenn nur jedes δ_{k,r_k} $(k = 1 \dots m)$ kleiner als λ ist, mögen die Werthe $x_{1,r_1} \dots x_{m,r_m}$ wie immer in den bezüglichen Intervallen gewählt sein.

Das m-fache Integral

$$\mathcal{S}_{(\mathfrak{B})} dx_1 \dots dx_m$$

erklärt im Euclid'schen Raume von m-Dimensionen den Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ (vgl. XIX. 11). Dieser Begriff wird bei der Aufstellung der m-fachen uneigentlichen Integrale benöthigt. Damit lassen sich nämlich, wie wir wohl sogleich hier bemerken dürfen, die Erklärungen und Sätze in

Nr. 1—8, sowie in Nr. 11—16 des folgenden Abschnittes auf m-fache Integrale ausdehnen.

Der Satz in Nr. 8 lässt sich verallgemeinern zur Verwandlung eines m-fachen Integrals in ein $(m-1)$-faches; desgleichen der Green'sche Satz in Nr. 10 zur Zurückführung eines gewissen m-fachen Integrals auf ein $(m-1)$-faches, dessen Gebiet die Begrenzung des ersteren bildet. Aus dem Green'schen Satze kann man endlich, wie J. Gmeiner[1]) gezeigt hat, die Transformation der m-fachen Integrale ableiten.

1) Monatshefte f. Math. u. Ph. VI. (1895) S. 303.

XVIII. Abschnitt.

Die uneigentlichen Doppelintegrale.

Das uneigentliche Doppelintegral über ein endliches Gebiet.

1. Wir nehmen jetzt an, dass die mindestens für jeden Punkt innerhalb des ganz im Endlichen gelegenen, von einfachen und gewöhnlichen Rändern begrenzten Gebietes $\mathfrak{F}$ definirte Function $f(x, y)$ darin nicht endlich sei, dass also von den Grenzen ihrer Werthe in $\mathfrak{F}$ mindestens eine unendlich sei. Dagegen sei $f(x, y)$ mindestens in jedem Gebiete $\mathfrak{G}$, das vollständig innerhalb $\mathfrak{F}$ liegt, d. h. mit der Begrenzung dieser Fläche keinen Punkt gemein hat, endlich. Es ist übrigens möglich, dass $f(x, y)$ auch in solchen Gebieten, zu denen neben Innenpunkten von $\mathfrak{F}$ auch Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ gehören, endlich ist. Gewöhnlich wird die Function $f(x, y)$ stetig sein bei allen Punkten innerhalb $\mathfrak{F}$ und bei jedem der Begrenzung von $\mathfrak{F}$, zu welchem eine gewisse Umgebung gehört, worin die Function endlich ist. Wir werden in der folgenden Erörterung $\mathfrak{F}$ und somit auch alle übrigen Flächen stets als positiv ansehen, was ja ausreicht. Die endlichen Flächen und ihre Zahlen werden stets mit den nämlichen Buchstaben bezeichnet. — Sollten auch im Innern eines Gebietes Punkte vorkommen, in deren Umgebung die betrachtete Function nicht endlich ist, so würden wir dasselbe durch Linien, auf welchen diese Punkte liegen, in Theilgebiete von der nämlichen Beschaffenheit wie die soeben beschriebene Fläche $\mathfrak{F}$ zerlegen.

Unter diesen Umständen kann die Function $f(x, y)$ ein eigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ nicht besitzen. Denn die auf S. 65 eingeführte Summe

$$S = \sum_1^n {}_r f(x_r,\, y_r)\, \tau_r$$

lässt sich, wenn man sich die Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ auch noch so klein (also sämmtlich kleiner als eine beliebig gegebene Zahl λ) denkt, noch immer durch passende Annahme eines Werthepaares $x_r,\, y_r$ ihrem Betrage nach grösser machen als eine beliebig gegebene Zahl $\gamma > 0$, so dass sie bei $\lim \tau_r = 0$ einen endlichen Grenzwerth nicht haben kann. Das ist leicht einzusehen. Es muss nämlich auf der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ mindestens einen Punkt $x = c,\, y = d$ geben, in dessen jeder Umgebung $f(x, y)$ eine unendliche Grenze z. B. die obere Grenze $+\infty$ hat. Wählen wir nun ein bestimmtes System von Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ aus, deren Durchmesser kleiner als $\sqrt{\lambda}$ sind, und lassen wir τ_n dasjenige unter ihnen sein, zu welchem der Punkt (c, d) gehört. Auch die Punkte $x_1,\, y_1 \ldots x_{n-1},\, y_{n-1}$ in den Theilen $\tau_1 \ldots \tau_{n-1}$ können wir willkürlich wählen. Da

$$S \geqq f(x_n,\, y_n)\, \tau_n - \left| \sum_1^{n-1} {}_r f(x_r,\, y_r)\, \tau_r \right|$$

ist, so wird $S > \gamma$ sein, wenn wir über den noch nicht bestimmten Punkt $x_n,\, y_n$ so verfügen, dass

$$f(x_n,\, y_n) > \left\{ \gamma + \left| \sum_1^{n-1} {}_r f(x_r,\, y_r)\, \tau_r \right| \right\} : \tau_n (= \gamma')$$

ist. Das ist in der That möglich, da es zu einer beliebig gegebenen Zahl $\gamma' > 0$ in jeder, auch noch so kleinen Umgebung des Punktes (c, d) solche Punkte $x_n,\, y_n$ geben muss, dass $f(x_n,\, y_n) > \gamma'$ ist.

2. Wir können jedoch in ähnlicher Art, wie es bei den einfachen Integralen geschehen ist, den Begriff des Doppelintegrals erweitern. Nehmen wir ein für alle Male an, dass die Function $f(x, y)$ über jedes von gewöhnlichen Rändern begrenzte[1]), innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene

1) In Zukunft sollen, wenn ganz im Endlichen gelegene Flächen vorkommen, immer solche gemeint sein, deren Ränder gewöhnliche Curven (s. S. 37) sind.

Gebiet $\mathfrak{G}$, wo sie endlich ist, ein Doppelintegral zulässt. Das versteht sich in dem zumeist vorliegenden Falle, dass $f(x, y)$ bei allen Punkten eines jeden solchen Gebietes $\mathfrak{G}$ stetig ist, von selbst. Giebt es für das eigentliche Doppelintegral

$$S_{\mathfrak{G}} f(x, y)\, dA,$$

während das Gebiet $\mathfrak{G}$ in irgend einer Art sich dem ursprünglichen $\mathfrak{F}$ unbegrenzt nähert, stets einen und denselben endlichen Grenzwerth J, so dürfen wir ihn als das Doppelintegral

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA$$

erklären, weil diese Grenzwerthe, wie wir zeigen werden, eine ähnliche Rolle spielen wie die eigentlichen Doppelintegrale.

Der genannte Grenzwerth wird in folgender Weise erklärt.[1]) Lassen wir die für die Flächen eingeführten Zeichen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ... zugleich die ihnen zukommenden Zahlen bedeuten, so soll die Zahl J das uneigentliche Doppelintegral der Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ heissen, d. i.

$$J = S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA$$

sein, falls jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $\delta > 0$ sich so zuordnen lässt, dass stets

---

1) Die Erklärung des uneigentlichen Doppelintegrals ist nach C. Jordan, Cours d'Analyse 2. éd. II. S. 81 gegeben, an dessen Darstellung (a. a. O. Nr. 73—76) ich mich in Nr. 1—8 im Allgemeinen angeschlossen habe. Die a. a. O. gegebenen Sätze lassen sich auf das obere und untere Doppelintegral einer über das Gebiet $\mathfrak{F}$ nicht integrirbaren Function von x und y ausdehnen. C. Jordan legt seiner Darstellung von vornherein diese beiden Doppelintegrale zu Grunde.

Eine allgemeinere Erklärung des uneigentlichen Doppelintegrals über ein endliches Gebiet hat C. de la Vallée-Poussin seinen klassischen „Recherches sur la convergence des intégrales definies" (Journal de Mathém. 1892 S. 421 flg.) in Nr. 20 zu Grunde gelegt. Es lässt sich aber auch die hier gegebene in derselben Weise verallgemeinern, nämlich in ähnlicher Art, wie wir im Nachtrage III den Begriff des absolut convergenten, einfachen bestimmten Integrals ausdehnen werden.

$$| J - S_{\mathfrak{G}} f(x, y) d\mathsf{A} | < \varepsilon \tag{1}$$

ist, wenn nur die innerhalb $\mathfrak{J}$ gelegene Fläche $\mathfrak{G}$ davon sich um weniger als δ unterscheidet, also

$$0 < \mathfrak{J} - \mathfrak{G} < \delta \tag{1*}$$

ist. Dabei kann die Fläche $\mathfrak{G}$ sowohl zusammenhängend sein, als auch aus einer endlichen Anzahl von getrennten oder einander nur in Punkten berührenden, für sich zusammenhängenden Theilen bestehen. Die Begrenzung von $\mathfrak{G}$ hat entweder gar keinen Punkt mit der Begrenzung $\mathfrak{J}$ gemein oder doch nur solche, in deren Umgebung die Function $f(x, y)$ endlich ist.

Zur Existenz des uneigentlichen Doppelintegrals $S_{\mathfrak{J}} f d\mathsf{A}$ ist nothwendig und hinreichend, dass jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so entspricht, dass, wenn $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ irgend zwei innerhalb $\mathfrak{J}$ gelegene Flächen bedeuten, zu denen eigentliche Doppelintegrale von $f(x, y)$ gehören und deren jede von $\mathfrak{J}$ um weniger als δ abweicht, so dass

$$0 < \mathfrak{J} - \mathfrak{G} < \delta \qquad 0 < \mathfrak{J} - \mathfrak{G}' < \delta \tag{2}$$

ist, alsdann stets

$$| S_{\mathfrak{G}} f(x, y) d\mathsf{A} - S_{\mathfrak{G}'} f(x, y) d\mathsf{A} | < \varepsilon \tag{3}$$

ist.[1]) — Die Nothwendigkeit dieser Bedingung erhellt unmittelbar aus der obigen Erklärung von $S_{\mathfrak{J}} f d\mathsf{A}$. Lassen wir nämlich $\mathfrak{G}'$ eine zweite Fläche sein, welche den Beziehungen

$$0 < \mathfrak{J} - \mathfrak{G}' < \delta \qquad | J - S_{\mathfrak{G}'} f d\mathsf{A} | < \varepsilon \tag{4}$$

genügt, so finden wir mittelst der Formel

$$S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A} - S_{\mathfrak{G}'} f d\mathsf{A} = (S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A} - J) + (J - S_{\mathfrak{G}'} f d\mathsf{A})$$

aus (1) und (4), dass

$$| S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A} - S_{\mathfrak{G}'} f d\mathsf{A} | < 2\varepsilon$$

ist. Wir brauchen also blos das willkürliche ε in (1) durch $\varepsilon : 2$ zu ersetzen, um zur Ungleichung (3) zu gelangen.

---

1) C. Jordan a. a. O. S. 77.

Dass das Bestehen der zusammengehörigen Ungleichungen (2) und (3) zur Existenz eines endlichen Grenzwerthes J ausreicht, kann zunächst wie in Arithmetik I, S. 116 durch Aufstellung seiner systematischen Form bewiesen werden. Oder man bedient sich hierzu des Satzes, dass, wenn die Unbestimmtheitsgrenzen von

$$S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A} \text{ bei } \lim \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$$

einander gleich sind, ihr gemeinsamer Werth der Grenzwerth von $S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A}$ bei $\lim \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ in dem obigen Sinne ist. Diese Unbestimmtheitsgrenzen werden genau in der nämlichen Weise erklärt wie auf S. 162 d. I. T. der Arithmetik für die Function $f(x)$ bei einem gegebenen Grenzübergange des Argumentes x. Im gegenwärtigen Falle tritt blos an Stelle von x die Veränderliche $u = \mathfrak{F} - \mathfrak{G}$. D. i. beschränkt man zunächst $\mathfrak{G}$ auf die Werthe von Null bis zu einem positiven u, so haben die zugehörigen Doppelintegrale $S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A}$ eine obere Grenze $g(u)$. Und lässt man jetzt u von 0 bis $\mathfrak{F}$ wachsen, ohne dass es jedoch diese Werthe selbst annimmt, so kann $g(u)$ nicht abnehmen, hat also bei $\lim u = +0$ einen Grenzwerth. Dieser heisst die obere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelintegrale $S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A}$ bei $\lim \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$. Auf ähnliche Art erklärt man die untere Unbestimmtheitsgrenze der $S_{\mathfrak{G}}$ bei $\lim \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$.

Lässt man nun die Beziehungen (2) und (3) zunächst wenigstens für einen Werth von ε gelten, so folgt schon daraus die Endlichkeit von $S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A}$ für alle möglichen Gebiete $\mathfrak{G}$ innerhalb $\mathfrak{F}$. Denn ist $\mathfrak{G}'$ in (2) eine bestimmte Fläche und $\mathfrak{G}$ ein Stück derselben, so hat man

$$|S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A}| < M' \mathfrak{G}',$$

unter M' die obere Grenze von $|f(x, y)|$ im Gebiete $\mathfrak{G}'$ verstanden. Liegt aber $\mathfrak{G}'$ völlig innerhalb $\mathfrak{G}$, so erschliesst man aus (3), dass

$$|S_{\mathfrak{G}}| \leqq |S_{\mathfrak{G}'}| + |S_{\mathfrak{G}} - S_{\mathfrak{G}'}| < |S_{\mathfrak{G}'}| + \varepsilon \qquad (4^*)$$

ist. Und wenn endlich die Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ einander durchsetzen, so nehme man innerhalb $\mathfrak{F}$ eine Fläche $\mathfrak{G}''$ an, welche $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ enthält, so dass nach (4*)

$$|S_{\mathfrak{G}''}| < |S_{\mathfrak{G}'}| + \varepsilon \tag{5}$$

ist. Da nun $\mathfrak{F} - \mathfrak{G}'' < \mathfrak{F} - \mathfrak{G}' < \delta$ ist, so hat man nach (3) $|S_{\mathfrak{G}} - S_{\mathfrak{G}''}| < \varepsilon$, folglich nach (5)

$$|S_{\mathfrak{G}}| \leqq |S_{\mathfrak{G}''}| + |S_{\mathfrak{G}} - S_{\mathfrak{G}''}| < |S_{\mathfrak{G}'}| + 2\varepsilon.$$

Aus der Endlichkeit von $S_{\mathfrak{G}}$ für alle $\mathfrak{G} < \mathfrak{F}$ ergiebt sich, dass auch seine Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ endliche Zahlen sind. Setzt man jetzt die Giltigkeit der Beziehungen (2) und (3) für jeden Werth von ε voraus, so findet man schliesslich, dass diese Unbestimmtheitsgrenzen einander gleich sind (vgl. a. a. O. S. 166).

3. Denken wir uns ein System von gewöhnlichen Curven, welche sich der Begrenzung des Gebietes $\mathfrak{F}$ unbegrenzt nähern. Und zwar soll eine jede von ihnen diejenigen umschliessen, welche von der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ weiter abstehen als sie. Somit dürfen sich keine zwei Curven des Systemes schneiden, wohl aber können alle einzelne Punkte oder ganze Stücke der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ mit einander gemein haben. Analytisch kann ein solches Curvensystem durch so viele Paare von Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(\tau, \sigma) \quad y = \psi(\tau, \sigma) \tag{5*}$$

dargestellt werden, als es Ränder von $\mathfrak{F}$ giebt. Dabei soll der Parameter σ durch genau vorgeschriebene positive Werthe zur Null convergiren und diese Gleichungen selbst durch die Annahme $\sigma = 0$ in die der Ränder von $\mathfrak{F}$ übergehen. Wenn wir mit $\mathfrak{G}(\sigma)$ die Zahl der Fläche bezeichnen, welche von der oder den Curven (5*) begrenzt wird, so haben wir

$$\lim_{\sigma = +0} \mathfrak{G}(\sigma) = \mathfrak{F}. \tag{6}$$

Und es besteht der Satz[1]):

Hat die Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ ein uneigentliches Doppelintegral

$$J = S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, d\mathsf{A},$$

so ist es der Grenzwerth des eigentlichen Doppelintegrals von $f(x, y)$ über das veränderliche Ge-

---

1) C. Jordan a. a. O. Nr. 77.

biet $\mathfrak{G}(\sigma)$, welches sich dem Gebiete $\mathfrak{F}$ unbegrenzt nähert, bei $\lim \sigma = +0$, d. i.

$$J = \lim_{\sigma = +0} S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f(x, y)\, dA. \qquad (7)$$

Vermöge der Formel (6) können wir nämlich der positiven Zahl δ in (1*) (S. 125) eine andere $\varrho > 0$ so zuordnen, dass neben $\sigma < \varrho$ stets $\mathfrak{F} - \mathfrak{G}(\sigma) < \delta$ ist. Daher ist zufolge der Ungleichung (1) neben

$$\sigma < \varrho \text{ stets } |J - S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f\, dA| < \varepsilon;$$

es besteht also die Formel (7).

3*. Wir müssen nun die Bedingung, welche in Nr. 2 als zum Vorhandensein des Doppelintegrals $S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA$ nothwendig und hinreichend erklärt wurde, durch eine andere ersetzen.[1]) Sie lautet:

Zum Vorhandensein des uneigentlichen Doppelintegrals $S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA$ ist nothwendig und hinreichend, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $\delta > 0$ so entspricht, dass für jedes innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Gebiet $\mathfrak{g}$, zu dem ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ gehört und dessen Inhalt kleiner als δ ist,

$$|S_{\mathfrak{g}} f(x, y)\, dA| < \varepsilon \qquad (1)$$

ist. Dabei kann die Fläche $\mathfrak{g}$ sowohl zusammenhängend sein, als auch aus einer endlichen Anzahl von getrennten oder einander nur in Punkten berührenden, für sich zusammenhängenden Theilen bestehen. Die Begrenzung von $\mathfrak{g}$ kann mit der von $\mathfrak{F}$ Punkte gemein haben, nur muss zu $\mathfrak{g}$ ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ gehören.

Beweis. Diese Bedingung ist hinreichend. Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ irgend zwei Gebiete innerhalb $\mathfrak{F}$, die davon um weniger als δ abweichen und in denen $f(x, y)$ endlich ist. Sie mögen zunächst ein Gebiet $\mathfrak{H}$ gemein haben. Bedeutet dann $\mathfrak{g}$ den Ueberschuss von $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{g}$, und $\mathfrak{g}'$ den Ueberschuss von $\mathfrak{G}'$ über $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{G}' = \mathfrak{H} + \mathfrak{g}'$ ist, so liegt $\mathfrak{g}$ in der Fläche, welche von $\mathfrak{F}$ nach Wegnahme von $\mathfrak{G}'$, und $\mathfrak{g}'$ in derjenigen, welche von $\mathfrak{F}$ nach Wegnahme

1) Vgl. C. Jordan a. a. O. Nr. 74.

von $\mathfrak{G}$ übrig bleibt. (Fällt $\mathfrak{H}$ z. B. mit $\mathfrak{G}$ zusammen, so setze man $\mathfrak{g} = 0$.) Wir haben somit

$$\mathfrak{g} < \mathfrak{F} - \mathfrak{G}' < \delta \qquad \mathfrak{g}' < \mathfrak{F} - \mathfrak{G} < \delta, \tag{2}$$

so dass nach (1) $|S_\mathfrak{g}| < \varepsilon$ $|S_{\mathfrak{g}'}| < \varepsilon$ ist. Ferner ist für die eigentlichen Doppelintegrale $S_\mathfrak{G}$, $S_{\mathfrak{G}'}$,

$$S_\mathfrak{G} = S_\mathfrak{H} + S_\mathfrak{g} \quad S_{\mathfrak{G}'} = S_\mathfrak{H} + S_{\mathfrak{g}'}$$
$$S_\mathfrak{G} - S_{\mathfrak{G}'} = S_\mathfrak{g} - S_{\mathfrak{g}'},$$

woraus sich ergiebt, dass

$$|S_\mathfrak{G} - S_{\mathfrak{G}'}| \leqq |S_\mathfrak{g}| + |S_{\mathfrak{g}'}| < 2\varepsilon \tag{3}$$

ist. Im Falle, dass die Flächen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ kein Stück gemein haben, muss $\mathfrak{G}' < \mathfrak{F} - \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} < \mathfrak{F} - \mathfrak{G}'$, somit $\mathfrak{G}' < \delta'$, $\mathfrak{G} < \delta$ sein, so dass ebenfalls die Beziehung (3) besteht. Die zusammengehörigen Ungleichungen (2) und (3) besagen nach Nr. 2 in der That, dass die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulässt.

Die in Rede stehende Bedingung ist aber auch nothwendig. Denn angenommen sie sei nicht erfüllt, so kann das Doppelintegral $S_\mathfrak{F}$ nicht existiren. Dann müsste nämlich, wenn ε und δ gegebene positive Zahlen bedeuten und $\delta' < \delta$ ist, zu δ' ein Gebiet $\mathfrak{g}$ innerhalb $\mathfrak{F}$, dessen Inhalt kleiner als δ' ist, gehören, wofür $|S_\mathfrak{g}| \geqq \varepsilon$ ist. Nun sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet innerhalb $\mathfrak{F}$, welches $\mathfrak{g}$ enthält und zugleich so gewählt ist, dass $\mathfrak{F} - \mathfrak{G} < \delta - \delta'$ ist. Ein solches muss es geben; denn denkt man sich zwischen der Begrenzung von $\mathfrak{g}$ und der von $\mathfrak{F}$ eine stetige Schaar einander nicht schneidender Curven, so nimmt der Inhalt der von ihnen umschlossenen Flächen ebenfalls stetig von $\mathfrak{g}$ bis $\mathfrak{F}$ zu. Nehmen wir von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{g}$ weg, so erhalten wir das Gebiet $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} - \mathfrak{g}$, wobei

$$0 < \mathfrak{F} - \mathfrak{G}' = (\mathfrak{F} - \mathfrak{G}) + \mathfrak{g} < (\delta - \delta') + \delta' = \delta$$

ist. Zugleich haben wir

$$|S_\mathfrak{G} - S_{\mathfrak{G}'}| = |S_\mathfrak{g}| \geqq \varepsilon. \tag{4}$$

Es giebt demnach, wie klein die Zahl δ auch sein mag, dennoch zwei Gebiete $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ innerhalb $\mathfrak{F}$, davon um weniger als δ verschieden, wofür gleichwohl die Beziehung (4) besteht. Also besitzt die Function $f(x, y)$ kein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$.

Im Falle dass $f(x, y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ sein Zeichen nicht ändert, lässt sich durch eine Betrachtung, welche der unten auf S. 133 Z. 4 angestellten ähnlich ist, zeigen, dass aus den Beziehungen (2) und (3) in Nr. 2 unmittelbar die obige (1) folgt.

Es sei noch bemerkt, dass es genügt, im vorstehenden Satze unter $\mathfrak{g}$ blos jene innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegenen und den Inhalt δ nicht erreichenden Flächen zu verstehen, welche mit der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ keinen Punkt gemein haben. Nehmen wir in der That an, es sei der Satz nur für solche Flächen $\mathfrak{g}$ ausgesprochen und zwar entspreche einer beliebig gewählten positiven Zahl $\varepsilon' < \varepsilon$ die Zahl δ'. Giebt es nun eine an die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ heranreichende Fläche $\mathfrak{g}'$, kleiner als δ', worin $f(x, y)$ endlich ist, so kann man von ihr ein Stück $\mathfrak{u}$ so abschneiden, dass der Rest von $\mathfrak{g}'$ keinen Punkt mit der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ gemein hat und dabei $|S_{\mathfrak{u}} f dA|$ kleiner ist als eine beliebig gegebene Zahl $\varkappa$. Da es nämlich eine Constante g giebt derart, dass $|f(x, y)| < g$ ist für jeden Punkt von $\mathfrak{g}'$, so hat man nach dem 10. Satze auf S. 79 $|S_{\mathfrak{u}}| < g\mathfrak{u}$; mithin ist $|S_{\mathfrak{u}}| < \varkappa$, wenn nur $\mathfrak{u} < \varkappa : g$ gewählt wird. Es ist nun ferner

$$S_{\mathfrak{g}'} f dA = S_{\mathfrak{u}} f dA + S_{\mathfrak{g}'-\mathfrak{u}} f dA,$$

somit

$$|S_{\mathfrak{g}'}| \leqq |S_{\mathfrak{u}}| + |S_{\mathfrak{g}'-\mathfrak{u}}| < \varkappa + \varepsilon'.$$

Hieraus ergiebt sich bei der Willkürlichkeit von $\varkappa$, dass $|S_{\mathfrak{g}'}| \leqq \varepsilon'$, also $|S_{\mathfrak{g}'}| < \varepsilon$ ist. Demnach ist für jede Fläche $\mathfrak{g}$, kleiner als δ', zu der ein eigentliches Doppelintegral von $\mathfrak{F}$ gehört,

$$|S_{\mathfrak{g}} f dA| < \varepsilon.$$

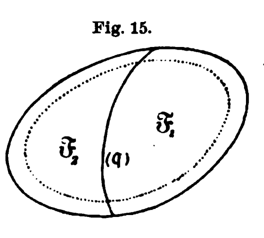
Corollar. „Hat die Function $f(x, y)$ ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ und zerlegen wir dieses durch eine einfache gewöhnliche Linie $\mathfrak{q}$ in zwei Gebiete $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so lässt die Function $f(x, y)$ über jedes von ihnen ein uneigentliches Doppelintegral zu. Dabei ist

$$S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA = S_{\mathfrak{F}_1} f(x, y)\, dA + S_{\mathfrak{F}_2} f(x, y)\, dA. \qquad (5)$$

Und umgekehrt: Hat $f(x, y)$ ein Doppelintegral über jedes von zwei aneinanderstossenden Gebieten $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, so auch eines über das durch Vereinigung der beiden entstehende Gebiet $\mathfrak{F}$.“

Beweis. Die Beziehung (1) gilt auch für alle Flächen $\mathfrak{g}$, welche zu $\mathfrak{F}_1$ gehören, ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ zulassen und dabei kleiner als δ sind. Somit existirt das Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}_1} f d\mathsf{A}$. Aus demselben Grunde ist auch $S_{\mathfrak{F}_2} f d\mathsf{A}$ vorhanden. Denken wir uns nun ein System von Curven, die ganz innerhalb $\mathfrak{F}$ liegen und der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ beliebig nahekommen können. Irgend eine von diesen Curven, deren Coordinaten von einem Parameter σ abhängen mögen, sei durch die punktirte Linie in Fig. 15 dargestellt. Die von ihr umschlossene Fläche sei $\mathfrak{G}(\sigma)$ und zwar sei $\lim \mathfrak{G}(\sigma) = \mathfrak{F}$ bei $\lim \sigma = +0$. Ist nun die Linie $\mathfrak{q}$ z. B. ein Querschnitt von $\mathfrak{F}$, der zwei Punkte des Randes von $\mathfrak{F}$ verbindet, so theilt sie die Fläche $\mathfrak{G}(\sigma)$ in zwei, $\mathfrak{G}_1(\sigma)$ und $\mathfrak{G}_2(\sigma)$, wobei nach der Formel (16) auf S. 76

Fig. 15.



$$S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f d\mathsf{A} = S_{\mathfrak{G}_1(\sigma)} f d\mathsf{A} + S_{\mathfrak{G}_2(\sigma)} f d\mathsf{A}$$

ist. Aus dieser Beziehung folgt, wenn wir σ zur Null convergiren lassen, nach der vorigen Nummer unmittelbar die Formel (5).

Lässt umgekehrt $f(x, y)$ ein Doppelintegral sowohl über die Fläche $\mathfrak{F}_1$, als auch über die $\mathfrak{F}_2$ zu, so muss zur Zahl $\varepsilon : 2$ eine andere $\delta > 0$ so gehören, dass wenn innerhalb $\mathfrak{F}_1$ irgend ein Gebiet $\mathfrak{g}_1$ kleiner als δ, zu dem ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ gehört, gewählt wird und desgleichen innerhalb $\mathfrak{F}_2$ irgend eines, $\mathfrak{g}_2$, kleiner als δ, von der nämlichen Beschaffenheit, dann stets sowohl

$$|S_{\mathfrak{g}_1} f d\mathsf{A}| < \varepsilon : 2, \quad \text{als auch} \quad |S_{\mathfrak{g}_2} f d\mathsf{A}| < \varepsilon : 2 \tag{6}$$

ist. Verstehen wir nun unter $\mathfrak{g}$ ein Gebiet innerhalb $\mathfrak{F}$, welches kleiner als δ ist, für die Function $f(x, y)$ ein eigentliches Doppelintegral liefert, und wovon ein Theil $\mathfrak{g}_1$ zu $\mathfrak{F}_1$, der Rest $\mathfrak{g}_2$ zu $\mathfrak{F}_2$ gehört, so haben wir wie oben

$$S_{\mathfrak{g}} f d\mathsf{A} = S_{\mathfrak{g}_1} f d\mathsf{A} + S_{\mathfrak{g}_2} f d\mathsf{A}.$$

Somit ist nach (6), da wenn $\mathfrak{g} < \delta$, auch $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ kleiner als δ sind,

$$|S_{\mathfrak{g}} f d\mathsf{A}| < \varepsilon.$$

Es besteht also für das Gebiet $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ stets, wenn nur $\mathfrak{g} < \delta$ ist, die Beziehung (1), somit lässt die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über $\mathfrak{F}$ zu.

4. I. Fall. Die Function $f(x, y)$ wechselt im Innern des Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen nicht, z. B. es sei für jeden Punkt x, y innerhalb $\mathfrak{F}$ $f(x, y) \geqq 0$, welche Annahme wir in dieser Nummer festhalten wollen. Dann ist von den eigentlichen Doppelintegralen $S_{\mathfrak{G}} f d\mathsf{A}$, wo $\mathfrak{G}$ zum Mindesten jede in $\mathfrak{F}$ enthaltene Fläche, welche mit dem Rande von $\mathfrak{F}$ keinen Punkt gemein hat, sein darf, keines negativ. Betrachten wir insbesondere ein System von Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ innerhalb $\mathfrak{F}$, wie es in Nr. 3 beschrieben ist, so haben wir neben $0 < \sigma' < \sigma$

$$\mathfrak{G}(\sigma') > \mathfrak{G}(\sigma), \quad \text{also} \quad S_{\mathfrak{G}(\sigma')} f d\mathsf{A} \geqq S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f d\mathsf{A}.$$

Das eigentliche Doppelintegral

$$J(\sigma) = S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f(x, y)\, d\mathsf{A} \tag{a}$$

nimmt demnach bei abnehmenden σ nicht ab, hat somit bei $\lim \sigma = +0$ einen Grenzwerth, der entweder eine positive Zahl J oder $+\infty$ sein kann. Und es besteht der Satz: „Die Function $f(x, y)$ hat ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ oder nicht, je nachdem es mindestens ein System von Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$, völlig innerhalb $\mathfrak{F}$ liegend und der Bedingung, dass

$$\lim_{\sigma = +0} \mathfrak{G}(\sigma) = \mathfrak{F} \tag{b}$$

ist, genügend, giebt, wofür

$$\lim_{\sigma = +0} S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f(x, y)\, d\mathsf{A} \tag{c}$$

endlich oder unendlich ist. Und zwar ist im ersten Falle das Doppelintegral gleich diesem Grenzwerthe (c). Dieser erste Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die Integrale $J(\sigma)$ sämmtlich unter einer endlichen Constanten H liegen."

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass der Grenzwerth (c) eine positive endliche Zahl J ist, so können wir jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $0 < \sigma < \varrho$ ist,

$$J - \varepsilon < J(\sigma) < J \qquad \text{(d)}$$

ist. Somit haben wir neben $0 < \sigma' < \sigma$

$$0 \leqq J(\sigma') - J(\sigma) < \varepsilon. \qquad \text{(e)}$$

Verstehen wir nun unter σ einen festen Werth zwischen 0 und ϱ und denken uns in $\mathfrak{F}$ die Fläche $\mathfrak{G}(\sigma)$ gezeichnet. Für dieselbe hat $f(x, y)$ eine endliche obere Grenze g, so dass, wenn $\mathfrak{g}$ irgend ein Flächenstück innerhalb $\mathfrak{G}(\sigma)$ bedeutet, nach dem 10. Satze auf S. 79

$$0 \leqq S_{\mathfrak{g}} f(x, y)\, dA \leqq g\, \mathfrak{g}$$

ist. Es ist demnach $S_{\mathfrak{g}} < \varepsilon$, wenn nur $\mathfrak{g} < \varepsilon : g$ ist. Bezeichnet aber $\mathfrak{g}$ ein Stück der Fläche $\mathfrak{F} - \mathfrak{G}(\sigma)$, das die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ nicht berührt, so haben die zu den positiven Zahlen $\sigma' < \sigma$ gehörigen Flächen $\mathfrak{G}(\sigma')$, weil sie der Fläche $\mathfrak{F}$ beliebig nahe kommen können, bei hinlänglicher Kleinheit von σ' die Eigenschaft, dass $\mathfrak{g}$ der von den Begrenzungen von $\mathfrak{G}(\sigma)$ und $\mathfrak{G}(\sigma')$ umschlossenen, aus einem oder mehreren Stücken bestehenden Fläche $\mathfrak{G}(\sigma') - \mathfrak{G}(\sigma)$ angehört. Demnach ist

$$S_{\mathfrak{g}} f\, dA < S_{\mathfrak{G}(\sigma') - \mathfrak{G}(\sigma)} = J(\sigma') - J(\sigma),$$

mithin nach (e)

$$S_{\mathfrak{g}} f\, dA < \varepsilon. \qquad \text{(f)}$$

Bezeichnet $\mathfrak{g}$ einen Theil von $\mathfrak{F}$, der kleiner als $\varepsilon : g$ ist, so wird er im Allgemeinen ein Stück mit der Fläche $\mathfrak{G}(\sigma)$ und eines mit $\mathfrak{F} - \mathfrak{G}(\sigma)$ gemein haben; daher ist $S_{\mathfrak{g}} f\, dA$ jedenfalls kleiner als 2ε. Es ist somit das uneigentliche Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA$ vorhanden (Nr. 3*). Sein Werth ist nach dem Satze in Nr. 3 gleich dem Grenzwerthe (c).

Wenn aber der Grenzwerth (c) $+\infty$ ist, so kann die Function $f(x, y)$ kein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulassen. Denn wäre ein solches vorhanden, so müsste nach dem Satze in Nr. 3 der Grenzwerth (c) ihm gleich sein, könnte also nicht unendlich sein.

Die zufolge des vorstehenden Satzes erforderliche Untersuchung lässt sich bisweilen mittelst des Corollars auf S. 130 oder durch die folgende Bemerkung vereinfachen.[1])

---

1) Die Bemerkung ist benutzt auf S. 136, das Corollar auf S. 139 Z. 4 v. u.

„Wenn die Begrenzungen sämmtlicher Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ (S. 127) das oder die nämlichen Stücke mit der von $\mathfrak{F}$ gemein haben, die Doppelintegrale

$$J(\sigma) = S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f(x, y) d\mathsf{A}$$

jedoch **uneigentliche** sind und $J(\sigma)$ bei $\lim \sigma = +0$ einen positiven endlichen Grenzwerth J besitzt, so lässt die Function $f(x, y)$ auch über das Gebiet $\mathfrak{F}$ ein Doppelintegral zu und zwar ist J sein Werth."

Beweis. Es sei $\mathfrak{H}$ eine Fläche innerhalb $\mathfrak{F}$, welche mit der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ keinen Punkt gemein hat. Da die Fläche $\mathfrak{G}(\sigma)$ sich bei $\lim \sigma = +0$ dem Gebiete $\mathfrak{F}$ beliebig nähern kann, so werden die Begrenzungen aller Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ bei gehöriger Kleinheit von σ das Gebiet $\mathfrak{H}$ umschliessen. Alsdann ist

$$S_{\mathfrak{H}} f d\mathsf{A} \leqq J(\sigma) < J. \tag{g}$$

Daraus folgt wieder, dass $S_{\mathfrak{F}} f d\mathsf{A}$ existirt. Man braucht, um dies einzusehen, nur $\mathfrak{H}$ durch ein System von Flächen $\mathfrak{H}(\tau)$, welche bei $\lim \tau = +0$ zur Grenze $\mathfrak{F}$ convergiren, zu ersetzen und zu bemerken, dass die Integrale $S_{\mathfrak{H}(\tau)}$ bei

$$\lim \tau = +0$$

einen endlichen Grenzwerth J' haben müssen. Mithin ist $S_{\mathfrak{F}} f d\mathsf{A}$ vorhanden und zwar ist es gleich J'. Dann ergiebt sich aus der Beziehung

$$S_{\mathfrak{H}(\tau)} f d\mathsf{A} < J \text{ bei } \lim \tau = +0 \quad J' \leqq J. \tag{h}$$

Existirt $S_{\mathfrak{F}} f d\mathsf{A}$, so lässt $f(x, y)$ nach S. 130 auch ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{g}(\sigma) \equiv \mathfrak{F} - \mathfrak{G}(\sigma)$ zu. Wir haben ferner nach der Formel (5) auf S. 130

$$J' = J(\sigma) + S_{\mathfrak{g}(\sigma)} f d\mathsf{A}.$$

Demnach ist

$$J' \geqq J(\sigma),$$

woraus durch den Grenzübergang $\lim \sigma = +0$ die weitere Beziehung $J' \geqq J$ folgt. Zusammengehalten mit der früheren (h), liefert sie die Gleichung $J' = J$.

5. Allgemeine und besondere Beispiele. Wir führen zuerst den folgenden Satz vor. „Wenn die Function $f(x, y)$ mindestens in allen Punkten der Fläche $\mathfrak{F} \equiv K_1 M_1 L_1 L_2 M_2 K_2$ in Fig. 10 auf S. 82 mit Ausnahme derjenigen, welche den zur y-Axe parallelen Strecken $K_1 K_2$, $L_1 L_2$ angehören, **stetig**,

jedoch in der genannten Fläche nicht endlich ist und dabei innerhalb derselben ihr Zeichen nicht wechselt, so hat sie ein Doppelintegral über die Fläche $\mathfrak{F}$ oder keines, je nachdem das zweimalige Integral

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{a}$$

existirt oder nicht, und zwar ist im ersten Falle das Doppelintegral ihm gleich. Umgekehrt: Je nachdem diese Function ein Doppelintegral über die Fläche $\mathfrak{F}$ hat oder nicht, existirt jenes zweimalige Integral oder nicht.“ Wie a. a. O. ist $y = \varphi_1(x)$ die Gleichung der Curve $K_1 M_1 L_1$, $y = \varphi_2(x)$ die der Curve $K_2 M_2 L_2$, a $(= OA)$ und a' $(= OA')$ die äussersten Werthe der Abscissen der Punkte beider Curven.

Der erste Theil des Satzes ergiebt sich daraus, dass im Falle der Existenz des Integrals (a)

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \lim_{\xi=+0} \int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

und sodann nach XVII, 8

$$\int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \iint_{(\mathfrak{F}(\xi))} f(x, y)\,dx\,dy$$

ist, worin $\mathfrak{F}(\xi)$ das Gebiet $M_1 N_1 N_2 M_2$ bedeutet, das aus $\mathfrak{F}$ durch die in den Abständen $AP = P'A' = \xi$ zu $K_1 K_2$ und $L_1 L_2$ gezogenen Parallelen $M_1 M_2$, $N_1 N_2$ ausgeschnitten wird. Wir finden demnach

$$\lim_{\xi=+0} \iint_{(\mathfrak{F}[\xi])} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

somit nach dem Satze auf S. 132

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{a*}$$

Im Falle der Nicht-Existenz des Integrals (a) ist dagegen

$$\lim_{\xi=+0} \int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \lim_{\xi=+0} \iint_{\mathfrak{F}(\xi)} f(x,y)\,dx\,dy = \pm\infty,$$

also lässt die Function $f(x, y)$ kein Doppelintegral über $\mathfrak{F}$ zu.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich die Umkehrung dieses Satzes. Allein da die Disjunction in demselben vollständig

ist, so bedarf es keines besonderen Beweises für seine Umkehrung; sie versteht sich vielmehr von selbst.

Man kann den vorstehenden Satz leicht auf den Fall ausdehnen, dass auch auf den Curven $K_1 M_1 L_1$ und $K_2 M_2 L_2$ Punkte vorhanden sind, in deren jedes Umgebung die Function $f(x, y)$ nicht endlich ist, und zwar je in endlicher Anzahl. Zieht man nämlich von jedem dieser Punkte eine Parallele zur y-Axe, so zerfällt das Gebiet $\mathfrak{F}$ in eine endliche Anzahl von Theilgebieten, in deren jedem $f(x, y)$ die nämlichen Eigenschaften hat wie im obigen Satze. Derselbe kann also auf jedes Theilgebiet angewendet werden. Lässt $f(x, y)$ ein Doppelintegral über $\mathfrak{F}$ zu, so auch über jedes von ihnen und wir erhalten dafür eine Gleichung von der Form (a*). Durch Addition aller dieser Gleichungen gelangen wir wieder zu dieser Formel selbst. In ähnlicher Art kann man den in Rede stehenden Satz ausdehnen auf den Fall, dass sowohl auf $K_1 M_1 L_1$, als auch auf $K_2 M_2 L_2$ sich ein unendliches System der ersten Art von Punkten befindet, in deren jedes Umgebung $f(x, y)$ unendlich ist. Hierzu dient der Satz auf S. 134.

Einen besonderen Fall des Gebietes $\mathfrak{F}$ bildet das Rechteck $ABA'B'$ in Fig. 1 auf S. 12. Dann ist $\varphi_1(x) = b$, $\varphi_2(x) = b'$ und wir erhalten aus der Formel (a*)

$$\iint_{(ABA'B')} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x, y)\,dy. \tag{A}$$

Dabei braucht $f(x, y)$ in der Nachbarschaft keines Punktes der beiden zur y-Axe parallelen Strecken AB' und BA' endlich zu sein. Ist aber $f(x, y)$ in allen Punkten von AB' mit Ausnahme von A und B' (und allenfalls eines unendlichen Systems 1. Gattung) und in allen von BA' mit Ausnahme von B und A' (und allenfalls eines Systems von der genannten Art) stetig, so kann man im vorstehenden Satze die x- und y-Axe vertauschen und gelangt dadurch zur Formel

$$\iint_{(ABA'B')} f(x, y)\,dx\,dy = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x, y)\,dx. \tag{B}$$

Besondere Beispiele. 1) Die Function $1:(x+\alpha y)^\mu$, worin $\mu > 0$ und $\alpha > 0$ ist, hat ein Doppelintegral über das Quadrat $OACB$ (Fig. 16), worin $OA = OB = a > 0$ ist, oder nicht, je nachdem μ kleiner als 2 ist oder nicht. Wir haben, wenn μ nicht 1 und $x > 0$ ist,

$$\int_0^a \frac{dy}{(x+\alpha y)^\mu} = \left|\frac{(x+\alpha y)^{1-\mu}}{(1-\mu)\alpha}\right|_{y=0}^{y=a} = \frac{(x+\alpha a)^{1-\mu} - x^{1-\mu}}{(1-\mu)\alpha}. \tag{b}$$

Diese Function lässt sich nach x von $x=0$ bis $x=a$ integriren oder nicht, je nachdem $1-\mu>-1$ d. i. $\mu<2$ ist oder nicht. Und zwar finden wir im ersten Falle

$$\iint_{(OACB)}\frac{dx\,dy}{(x+\alpha y)^\mu}=\int_0^a dx\int_0^a\frac{dy}{(x+\alpha y)^\mu}$$
$$=\frac{a^{2-\mu}((1+\alpha)^{2-\mu}-\alpha^{2-\mu}-1)}{(1-\mu)(2-\mu)\alpha}.$$

Wenn $\mu=1$ ist, so ergiebt sich zunächst

$$\int_0^a\frac{dy}{x+\alpha y}=\frac{l(x+\alpha a)-lx}{\alpha},$$

also, da

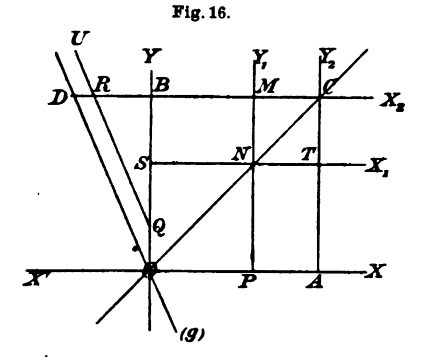
$$\int[l(x+\alpha a)-lx]dx=(x+\alpha a)l(x+\alpha a)-xlx, \qquad \text{(c)}$$

$$\iint_{(OACB)}\frac{dx\,dy}{x+\alpha y}=\int_0^a dx\int_0^a\frac{dy}{x+\alpha y}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\Big[(a+\alpha a)l(a+\alpha a)-ala$$
$$-\lim_{x=+0}\{(x+\alpha a)l(x+\alpha a)-xlx\}\Big]$$
$$=\frac{a}{\alpha}\{(1+\alpha)l(1+\alpha)-\alpha l\alpha\}.$$

Es hat nämlich xlx bei $\lim x=+0$ den Grenzwerth 0.[1])

2) Die Function $1:(x+\alpha y)^\mu$ wird in allen Punkten der Geraden $x+\alpha y=0$, in Fig. 16 mit g bezeichnet, unendlich. $x+\alpha y$ ist in der Halbebene rechts von g positiv, somit daselbst $(x+\alpha y)^\mu$ für jedes μ reell. Um zu entscheiden, ob die genannte Function ein Doppelintegral über das Gebiet OBD, wobei D auf g und der Verlängerung von BC liegt, zulässt, ziehen wir durch einen beliebigen Punkt Q auf OY eine Parallele zu g, welche BD in R schneidet, und berechnen das eigentliche Doppelintegral unserer Function über das Gebiet QBR. Die Gleichung von QR ist, wenn $OQ=\eta$ gesetzt wird,

Fig. 16.



1) Setzt man in der Formel (2) auf S. 81 d. I. T. $x=1:\xi$, $\nu=1$, so erhält man daraus die Formel

$$\lim_{\xi=+0}\xi l\xi=0.$$

$$x + \alpha(y - \eta) = 0, \tag{d}$$

wir haben daher $BR = \alpha(\eta - a)$ und somit

$$\left.\begin{aligned}\iint_{(QBR)} \frac{dx\,dy}{(x+\alpha y)^{\mu}} &= \int_{\alpha(\eta-a)}^{0} dx \int_{\eta-x:\alpha}^{a} \frac{dy}{(x+\alpha y)^{\mu}} \\ &= \frac{\alpha^{1-\mu}}{1-\mu}\left(\frac{a^{2-\mu}-\eta^{2-\mu}}{2-\mu} - (a-\eta)\eta^{1-\mu}\right),\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

falls μ weder 1 noch 2 ist. Dagegen ist

$$\iint_{(QBR)} \frac{dx\,dy}{x+\alpha y} = a l \frac{a}{\eta} - a + \eta, \tag{f}$$

$$\iint_{(QBR)} \frac{dx\,dy}{(x+\alpha y)^2} = \frac{1}{\alpha\eta}\left\{a - \eta + \eta l\left(\frac{\eta}{a}\right)\right\}. \tag{g}$$

Bei $\lim \eta = +0$ hat nur die rechte Seite von (e) und zwar nur, wenn $\mu < 1$ ist, einen endlichen Grenzwerth. Demnach hat die Function $1 : (x + \alpha y)^{\mu}$ ein Doppelintegral über das Gebiet OBD oder keines, je nachdem μ kleiner als 1 ist oder nicht. Also gilt nur im ersteren Falle die Formel

$$\iint_{(OBD)} \frac{dx}{(x+\alpha y)^{\mu}} = \frac{\alpha^{1-\mu}\,a^{2-\mu}}{(1-\mu)(2-\mu)}.$$

3) Die auf S. 6 eingeführte Function

$$\frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}, \tag{h}$$

deren Werthe innerhalb des Dreieckes OAC in Fig. 16 negativ, innerhalb des Dreieckes OCB positiv sind, lässt weder über das erstere, noch das letztere Gebiet ein uneigentliches Doppelintegral zu. — Ziehen wir nämlich $NP \perp OX$ und berechnen das eigentliche Doppelintegral der Function (h) über das Trapez $PACN$, wobei $OP = \xi$ sei, so finden wir nach der Formel (2*) a. a. O.

$$\left.\begin{aligned}\iint_{(PACN)} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy &= \int_{\xi}^{a} dx \int_{0}^{x} \frac{(y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^2}\,dy \\ &= \int_{\xi}^{a}\left(-\frac{1}{2x}\right)dx = -\frac{1}{2}\,l\left(\frac{a}{\xi}\right),\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

d. i. einen Ausdruck, welcher bei $\lim \xi = +0$ den Grenzwerth $-\infty$ hat. Das Doppelintegral der Function (h) über das Trapez $SNCB$, dessen Werth $\frac{1}{2}\,l(a : \xi)$ ist, hat bei $\lim \xi = +0$ den Grenzwerth $+\infty$.

4) „Es sei die eindeutige Function $f(x)$ im endlichen Intervalle (a, a') von x, worin sie ihr Zeichen nicht wechselt, in jedem Punkte x zwischen a und a' stetig. Desgleichen sei die eindeutige Function $g(y)$ im endlichen Intervalle (b, b') von y, worin sie ihr Zeichen nicht wechselt, in jedem Punkte y zwischen b und b' stetig. Mindestens eine von den beiden Functionen sei

in dem bezüglichen Intervalle nicht endlich. Die Function $f(x) \cdot g(y)$ lässt ein Doppelintegral über das von den Punkten $A \equiv (a, b)$, $B \equiv (a', b)$, $A' \equiv (a', b')$, $B' \equiv (a, b)$ gebildete Rechteck (Fig. 17) dann und nur dann zu, wenn die Integrale

$$\int_a^{a'} f(x)\,dx \qquad \int_b^{b'} g(y)\,dy \tag{1}$$

existiren. Und zwar hat man

$$\iint_{(ABA'B')} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} f(x)\,dx \,.\int_b^{b'} g(y)\,dy.\text{“} \tag{m}$$

Zieht man innerhalb $ABA'B'$ zu jeder Seite eine Parallele im Abstande ξ, so erhält man ein zweites Rechteck $MNM'N'$. Nach 2) auf S. 91 hat man dann

$$\iint_{(MNM'N')} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = \int_{a+\xi}^{a'-\xi} f(x)\,dx \,.\int_{b+\xi}^{b'-\xi} g(y)\,dy. \tag{n}$$

Lässt man ξ zum Grenzwerthe $+0$ convergiren, so hat hier jeder der Factoren rechts entweder einen endlichen, von Null verschiedenen,

Fig. 17.

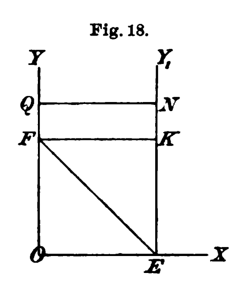


Fig. 18.

oder einen unendlichen Grenzwerth. Die linke Seite von (n) convergirt also bei $\lim \xi = +0$ dann und nur dann zu einem endlichen Grenzwerthe, wenn die Grenzwerthe der beiden Factoren links endlich sind, d. i. wenn die Integrale (1) existiren. Dann besteht aber die Formel (m).
Z. B. Sind α und β positive Zahlen, so existiren die Integrale

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx \qquad \int_0^1 y^{\beta-1}\,dy$$

(S. 386 d. I. T.). Bedeutet nun K den Punkt mit den Coordinaten $x = OE = 1$, $y = OF = EK = 1$ (Fig. 18), so hat man

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx \,.\int_0^1 y^{\beta-1}\,dy = \iint_{(OEKF)} x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,dx\,dy.$$

Demnach hat die Function $x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$ auch ein Doppelintegral über das Dreieck OEF, welches die Hälfte des Quadrates $OEKF$ ist (S. 130). Den Werth dieses von Dirichlet (Werke I S. 398) eingeführten Doppelintegrals

$$\iint_{(OEF)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dx\,dy$$

werden wir auf S. 177 kennen lernen.

Weitere Beispiele s. Nr. 19.

Anmerkung. Wenn wir bezüglich der Functionen $f(x)$, $g(y)$ nichts weiter annehmen würden, als dass die eine innerhalb des Intervalles (a, a') von x, die andere innerhalb des Intervalles (b, b') von y ihr Zeichen nicht wechselt und dass die eine in jedem innerhalb (a, a'), die andere in jedem innerhalb (b, b') gelegenen Intervalle integrirbar ist, so kann die Function $f(x)g(y)$ ein Doppelintegral über das Rechteck $ABA'B'$ zulassen, ohne dass beide Integrale (b) existiren. Es kann nämlich der eine von den beiden Factoren auf der rechten Seite der auch jetzt giltigen Gleichung (n) bei willkürlichem ξ verschwinden, so dass man

$$\iint_{(MNM'N')} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = 0$$

findet. Dann ist nach dem Satze auf S. 132 auch

$$\iint_{(ABA'B')} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = 0.$$

Diese Besonderheit tritt ein, wenn wir für $f(x)$ die auf S. 73 eingeführte Function $\varphi(x)$ nehmen. Wählen wir die Function $g(y)$ so, dass das zweite der Integrale (l) nicht existirt, so ist alsdann das Doppelintegral von $\varphi(x)\,g(y)$ über das Rechteck $ABA'B'$ vorhanden, während das zweimalige Integral

$$\int_a^{a'} \varphi(x)\,d(x) \int_b^{b'} g(y)\,dy$$

keinen Sinn hat. Dagegen ist

$$\int_b^{b'} g(y)\,dy \int_a^{a'} \varphi(x)\,dx = 0.$$

6. II. Fall. Die Function $f(x, y)$ wechselt innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen. Dann besteht der folgende Satz[1]):

---

1) P. du Bois-Reymond spricht diesen Satz im 94. Bd. d. Journals f. r. u. a. Math. S. 281 aus und deutet den Beweis der Nothwendigkeit der in demselben angegebenen Bedingung, welcher allein Schwierigkeit macht, in der Art an, dass man im Falle, dass $|f(x, y)|$ kein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulässt, nachweisen könne, dass der Grenzwerth des Doppelintegrals von $f(x, y)$ über ein Gebiet $\mathfrak{G}(\sigma)$ (s. S. 127) für $\lim \sigma = +0$ bei gehöriger Wahl des letzteren jede beliebige Zahl sein kann. Dies setzt aber voraus, dass das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ sich so in eine endliche Anzahl von Theilen zerlegen lässt, dass $f(x, y)$ in keinem von ihnen das Zeichen wechselt. — Die Darstellung i. T. schliesst sich an C. Jordan (a. a. O. Nr. 75 und 76) an.

Dazu, dass die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzt, ist nothwendig und hinreichend, dass $|f(x, y)|$ ein Doppelintegral über dieses Gebiet zulässt.

Beweis. Dass diese Bedingung ausreicht, ist leicht einzusehen. Nach Voraussetzung lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $\mathfrak{g}$ eine Fläche innerhalb $\mathfrak{F}$ bedeutet, zu der ein eigentliches Doppelintegral von $|f(x, y)|$ gehört und die kleiner als δ ist, dann stets

$$S_{\mathfrak{g}} |f(x, y)| \, dA < \varepsilon$$

ist. Nun hat man nach dem 8. Satze auf S. 78

$$|S_{\mathfrak{g}} f(x, y) \, dA| \leqq S_{\mathfrak{g}} |f(x, y)| \, dA,$$

somit neben $0 < \mathfrak{g} < \delta$

$$|S_{\mathfrak{g}} f(x, y) \, dA| < \varepsilon,$$

d. h. es existirt $S_{\mathfrak{F}} f(x, y) \, dA$ (Nr. 3*).

Um die Nothwendigkeit der obigen Bedingung nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn es innerhalb $\mathfrak{F}$ ein Gebiet $\mathfrak{G}$ giebt, in welchem $f(x, y)$ sein Zeichen nicht wechselt, nach dem Corollare auf S. 130 das Doppelintegral $S_{\mathfrak{G}} f dA$, folglich auch

$$S_{\mathfrak{G}} |f| \, dA = \pm S_{\mathfrak{G}} f dA$$

vorhanden sein muss.

a) Daraus folgt unmittelbar, dass wenn das Gebiet $\mathfrak{F}$ sich in eine endliche Anzahl von Theile so zerlegen lässt, dass innerhalb eines jeden die Function $f(x, y)$ ihr Zeichen nicht wechselt, dann das Doppelintegral

$$S_{\mathfrak{F}} |f(x, y)| \, dA$$

vorhanden ist. Es lässt nämlich $|f(x, y)|$ über jeden dieser Theile ein Doppelintegral zu, folglich auch über die durch Zusammensetzung derselben gebildete Fläche $\mathfrak{F}$.

b) Dieser Satz lässt sich sofort auf den Fall ausdehnen, dass aus dem Gebiete $\mathfrak{F}$ erst nach Weglassung einer endlichen Anzahl von Stücken, in deren jedem $f(x, y)$ endlich ist, ein Gebiet $\mathfrak{F}'$ entsteht, das sich in eine endliche Anzahl von Theile zerlegen lässt, von welchen keiner einen Zeichenwechsel von $f(x, y)$ aufweist. Denn

$$S_{\mathfrak{F}'} |f(x, y)| dA$$

existirt nach dem soeben Bemerkten und es soll $f(x, y)$ über jedes der von $\mathfrak{F}$ ausgeschiedenen Stücke ein eigentliches Doppelintegral zulassen, folglich nach dem 8. Satze auf S. 78 auch $|f(x, y)|$.

c) Nehmen wir ferner an, dass aus dem vorliegenden Gebiete $\mathfrak{F}$ durch Ausschliessung einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und ganzen Stücken der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ mittelst Flächen von beliebiger Kleinheit, in deren jeder $f(x, y)$ nicht endlich ist, stets ein Gebiet $\mathfrak{F}'$ erhalten werden, das in eine endliche Anzahl von Theile zerfällt, von welchen keiner einen Zeichenwechsel von $f(x, y)$ aufweist. Da $S_{\mathfrak{F}} f(x, y) dA$ vorhanden sein soll, so muss nach Nr. 3* zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gehören, dass, wenn nur $\mathfrak{g}$ eine Fläche innerhalb $\mathfrak{F}$ bedeutet, zu der ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ gehört und die kleiner als δ ist, alsdann stets

$$|S_{\mathfrak{g}} f(x, y) dA| < \varepsilon \tag{1}$$

ist.

Wir führen die beiden Functionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ durch die Erklärung ein, dass die erstere in jedem Punkte x, y von $\mathfrak{F}$, wo $f(x, y)$ positiv ist, gleich $f(x, y)$, in jedem anderen gleich Null ist, die letztere hingegen in jedem Punkte x, y, wo $f(x, y)$ negativ ist, gleich $-f(x, y)$, in jedem anderen gleich Null ist. Demnach hat man überall in $\mathfrak{F}$

$$|f(x, y)| = f_1(x, y) + f_2(x, y). \tag{2}$$

Diese Functionen lassen über jedes Gebiet, wozu ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ gehört, auch je eines zu (vgl. S. 79). Nun möge $\mathfrak{g}$ irgend ein Gebiet innerhalb $\mathfrak{F}$, kleiner als δ, sein, zu dem ein eigentliches Doppelintegral von $f(x, y)$ gehört. Für dieses Integral gilt dann zufolge Voraussetzung die Beziehung (1). Wir können die Linien, welche die oben bezeichneten Punkte und Stücke der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ ausscheiden sollen, hier so wählen, dass $\mathfrak{g}$ ganz innerhalb des zurückbleibenden Gebietes $\mathfrak{F}'$ liegt. Aus der über $\mathfrak{F}'$ gemachten Annahme folgt natürlich, dass auch $\mathfrak{g}$ sich in eine endliche Anzahl von Theile so zer-

legen lässt, dass innerhalb keines von ihnen $f(x, y)$ das Zeichen wechselt. $\mathfrak{g}_1$ möge die Summe derjenigen unter ihnen sein, in welchen $f(x, y)$ nicht negativ, also gleich $f_1(x, y)$, $\mathfrak{g}_2$ die Summe derjenigen, in welchen $f(x, y)$ nicht positiv, also gleich $-f_2(x, y)$ ist. Da sowohl $\mathfrak{g}_1$ als auch $\mathfrak{g}_2$ kleiner als δ ist, so dürfen wir in (1) $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{g}_1$, sowie durch $\mathfrak{g}_2$ ersetzen. Wir erhalten demnach die Ungleichungen

$$S_{\mathfrak{g}_1} f_1(x, y)\, dA < \varepsilon \qquad S_{\mathfrak{g}_2} f_2(x, y)\, dA < \varepsilon. \tag{3}$$

Weil $f_1(x, y)$ in $\mathfrak{g}_2$, $f_2(x, y)$ in $\mathfrak{g}_1$ durchaus verschwindet, so ist

$$S_{\mathfrak{g}} f_1(x, y)\, dA = S_{\mathfrak{g}_1} f_1(x, y)\, dA$$
$$S_{\mathfrak{g}} f_2(x, y)\, dA = S_{\mathfrak{g}_2} f_2(x, y)\, dA.$$

Somit ergiebt sich aus (3), dass, wenn nur $\mathfrak{g} < \delta$ ist, dann stets

$$0 < S_{\mathfrak{g}} f_1(x, y)\, dA < \varepsilon, \qquad 0 < S_{\mathfrak{g}} f_2(x, y)\, dA < \varepsilon \tag{4}$$

ist. Diese Ungleichungen besagen, dass sowohl $f_1(x, y)$, als auch $f_2(x, y)$ ein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulässt. Ferner ist vermöge der Formel (2) zufolge des 3. Satzes auf S. 158

$$S_{\mathfrak{g}} |f(x, y)|\, dA = S_{\mathfrak{g}} f_1(x, y)\, dA + S_{\mathfrak{g}} f_2(x, y)\, dA;$$

hieraus und aus den Beziehungen (4) erhellt, dass, wenn nur $0 < \mathfrak{g} < \delta$ ist, alsdann

$$S_{\mathfrak{g}} |f(x, y)|\, dA < 2\varepsilon$$

ist. Daraus dürfen wir, da 2ε ebenfalls jede beliebige positive Zahl sein kann, nach dem Satze auf S. 128 schliessen, dass $|f(x, y)|$ ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzt.

d) Der in c) bewiesene Satz lässt sich auf ähnliche Weise erweitern, wie der in a) bewiesene durch die in b) gemachte Bemerkung.

Der Satz am Eingange der Nummer gilt auch für eine complexe Function der Veränderlichen x und y. Wir sagen nämlich, eine solche Function

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\, i$$

habe ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$, wenn dies von jeder ihrer beiden Coordinaten $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ gilt, wenn also

$$S_{\mathfrak{F}} |\varphi| \, dA \quad \text{und} \quad S_{\mathfrak{F}} |\psi| \, dA \tag{5}$$

existiren. Dann aber existirt auch $S_{\mathfrak{F}}(|\varphi| + |\psi|)\, dA$, folglich, da

$$|\varphi| + |\psi| \geqq \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \, (= |f|)$$

ist, nach einer Bemerkung auf S. 158 auch $S_{\mathfrak{F}} |f| \, dA$. Ist umgekehrt das letzte Doppelintegral vorhanden, so vermöge der Beziehungen

$$|\varphi| \leqq \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \qquad |\psi| \leqq \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$$

auch die Doppelintegrale (5) und somit auch $S_{\mathfrak{F}} f \, dA$.

7. Schluss. Der Satz der vorigen Nummer ist in zweifacher Hinsicht bemerkenswerth. Die Unterscheidung von absolut und nicht absolut convergenten uneigentlichen Integralen, welche bei den einfachen Integralen vorzunehmen war (vgl. S. 396 d. I. T.), entfällt bei den Doppelintegralen. Es giebt nur absolut convergente uneigentliche Doppelintegrale. Hierin unterscheiden sich dieselben aber von den Doppelreihen, bei denen neben der absoluten Convergenz die nicht absolute oder bedingte vorkommt.[1])

Wenn die Function $|f(x, y)|$ kein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulässt, so ist der Grenzwerth

$$\lim_{\sigma = +0} S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f(x, y) \, dA \tag{6}$$

entweder gar nicht vorhanden oder er hängt davon ab, wie das System der Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ (S. 127) angenommen wird. Im Falle, dass das Gebiet $\mathfrak{F}$ in eine endliche Anzahl von Theile zerfällt, in deren keinem $f(x, y)$ sein Zeichen wechselt, lässt sich auf ähnliche Art, wie man an den bedingt convergenten Reihen zeigt, dass bei gehöriger Anordnung der Glieder jeder beliebige Grenzwerth auftreten kann (vgl. Arithmetik I. S. 239), nachweisen, dass zu jeder gegebenen Zahl K ein solches System von Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ ermittelt werden kann, dass der Grenzwerth (6) gleich K ist.

Zum Schlusse sei bemerkt, dass wir es in dem Falle, wo die Function $|f(x, y)|$ kein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzt, für passender erachten, auch der Function

1) Vgl. Arithmetik I. S. 247, A. Pringsheim, Münchner Ber. 1897 S. 139. Die gegentheilige Ansicht von C. Jordan (a. a. O. I. S. 302 u. II. S. 88) beruht auf einer viel zu engen Erklärung der Convergenz einer Doppelreihe.

$f(x, y)$ keines beizulegen, als mit Cauchy[1]) das Doppelintegral von $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ unbestimmt oder unendlich sein zu lassen. Denn nach dem in der Theorie der einfachen Integrale eingeführten Begriffe soll das uneigentliche Integral eben ein, durch die Function und das Integrationsgebiet völlig bestimmter Grenzwerth sein. Diesen Einwand kann man auch P. du Bois-Reymond machen, wenn er a. a. O. in dem in Rede stehenden Falle von einem bedingt convergenten Doppelintegral spricht. Das einfache Integral ist ja, auch wenn es nicht absolut convergirt, vollkommen bestimmt.

Beispiele. 1) „Wenn die Function $f(x, y)$ mindestens in allen Punkten der Fläche $\mathfrak{F}$ in Fig. 10 auf S. 82 mit Ausnahme derjenigen, welche den zur y-Axe parallelen Strecken K_1K_2, L_1L_2 angehören, stetig, jedoch in dieser Fläche nicht endlich ist, dabei innerhalb derselben das Zeichen wechselt, so lässt sie ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zu oder nicht, je nachdem das zweimalige Integral

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} |f(x, y)|\, dy \tag{7}$$

existirt oder nicht. Im ersten Falle convergirt

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

absolut und es gilt die Formel

$$(J =) \iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.\text{“} \tag{8}$$

Je nachdem das Integral (7) vorhanden ist oder nicht, ist nach dem Satze auf S. 135 das Doppelintegral von $|f(x, y)|$, somit auch das von $f(x, y)$ selbst über das Gebiet $\mathfrak{F}$ vorhanden oder nicht. Im ersten Falle convergirt, da

$$\left| \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right| \leqq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} |f(x, y)|\, dy$$

ist, das Integral ..

1) Vgl. Moigno, Leçons de calcul diff. etc. II. S. 83. Auch Dirichlet, Werke I. S. 395 gebraucht diese Ausdrucksweise.

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

absolut. Daraus ergiebt sich die Formel (8) genau so, wie (a*) a. a. O.

Der vorstehende Satz lässt sich in der nämlichen Art ausdehnen, wie der Satz auf S. 135.

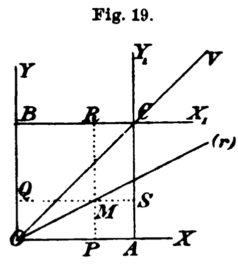
Besondere Beachtung verdient der besondere Fall des obigen Satzes, dass das Integrationsgebiet das Rechteck $ABA'B'$ (Fig. 1 auf S. 12) ist. Dann ist in (8) $\varphi_1(x) = b$ $\varphi_2(x) = b'$ zu setzen. Wenn $f(x, y)$ auch in allen Punkten von BA' mit Ausnahme von B und A', in allen von AB' mit Ausnahme von A und B' stetig ist, so besteht auch die Formel (B) auf S. 136. Unter anderen Umständen entscheiden darüber die Sätze in XVI. 3 und XVIII. 14.

2) „Die Function

$$(y^2 - x^2) : (y^2 + x^2)^2 \qquad \text{(a)}$$

hat kein Doppelintegral über das Quadrat $OACB$ (Fig. 19) mit der Seite a.“ Denn nach dem unter 3) auf S. 138 Bemerkten lässt die Function $(y^2 - x^2) : (y^2 + x^2)^2$ kein Doppelintegral zu, sowohl über das Dreieck OAC, als auch über OCB, folglich auch nicht über das Quadrat $OACB$. — Man kann übrigens die in Rede stehende Behauptung leicht unmittelbar als richtig erweisen. Nehmen wir innerhalb $OACB$ einen Punkt M mit den Coordinaten

Fig. 19.



$$OP = \xi \qquad OQ = \eta$$

an und ziehen $PMR \parallel OY$, $QMS \parallel OX$ und berechnen das Doppelintegral der Function (a) über das Rechteck $CRMS$ nach der Formel (e) auf S. 93. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \qquad \text{(b)}$$

mithin

$$\iint_{(CRMS)} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\, dx\, dy = \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{\xi} - \operatorname{arc\,tan} \frac{a}{\xi} - \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{a} + \frac{\pi}{4}. \qquad \text{(c)}$$

Wählt man M z. B. auf dem Halbstrahl r mit der Anomalie Θ $(0 < \Theta < \frac{\pi}{2})$, so dass $\eta = \xi \tan \Theta$ ist, so geht die rechte Seite von (c) in

$$\Theta - \operatorname{arc\,tan}(a:\xi) - \operatorname{arc\,tan}(\xi \tan \Theta : a) + \pi : 4$$

über. Lässt man nun M auf r gegen 0 rücken, so findet man bei $\lim \xi = +0$

$$\lim_{\xi=+0} \iint_{(CRMS)} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dx\,dy = \Theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \Theta - \frac{\pi}{4}.$$

Dieser Grenzwerth hängt von dem willkürlichen Winkel Θ ab; die Function (a) hat somit kein Doppelintegral über $OACB$.

3) „Es sei die Function $f(x)$ im endlichen Intervalle (a, a') nicht endlich, jedoch in jedem Punkte x zwischen a und a' stetig. Desgleichen sei die im endlichen Intervalle (b, b') nicht endliche Function $g(y)$ in jedem Punkte y zwischen b und b' stetig. Mindestens eine von den Functionen wechselt im bezüglichen Intervalle das Zeichen. Dann lässt die Function $f(x)g(y)$ über das Rechteck $ABA'B'$ (Fig. 17 auf S. 139) ein uneigentliches Doppelintegral nur unter der Bedingung zu, dass die Integrale $\int_a^{a'} f(x)\,dx$ und $\int_b^{b'} g(y)dy$ absolut convergiren. Und zwar ist

$$\iint_{(ABA'B')} f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} f(x)\,dx \cdot \int_b^{b'} g(y)\,dy.\text{“} \qquad \text{(d)}$$

Zur Existenz des genannten Doppelintegrals ist nothwendig die des Doppelintegrals

$$\iint_{(ABA'B')} |f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy,$$

folglich müssen nach 4) auf S. 139 die Integrale

$$\int_a^{a'} |f(x)|\,dx, \quad \int_b^{b'} |g(y)|\,dy$$

vorhanden sein. Die Gleichung (d) wird dann ähnlich wie (m) a. a. O. bewiesen.

Anmerkung. Wählt man die Function $g(y)$ so, dass

$$\int_{b+\xi}^{b'-\xi} g(y)\,dy$$

bei jedem positiven Werthe von ξ $(< [b'-b]:2)$ verschwindet, so ist nach der Anmerkung auf S. 140 stets

$$\lim_{\xi=+0} \iint_{(MNM'N')} f(x)g(y)\,dx\,dy = 0.$$

Dabei braucht das Integral $\int_b^{b'} g(y)\,dy$ nicht vorhanden zu sein. Dies tritt u. A. ein, wenn man $b = -b'$ und $g(y)$ eine solche ungerade, für alle Werthe zwischen $-b'$ und b' stetige Function von y

sein lässt, dass $\int_0^{b'} g(y)\,dy$ keinen Sinn hat. Den genannten Bedingungen genügt z. B. die Function $g(y) = y:(b'^2 - y^2)$, wofür in der That $g(-y) = -g(y)$ ist. Bei einer solchen Annahme von $g(y)$ lässt jedoch die Function $f(x)\cdot g(y)$ kein Doppelintegral über das Rechteck $A B A' B'$ zu.

Das uneigentliche Doppelintegral über ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet.

8. Es sei in der Ebene XOY ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet $\mathfrak{F}$, von dessen Begrenzung jeder im Endlichen gelegene Theil eine einfache und gewöhnliche Linie bildet, gegeben und eine eindeutige Function $f(x, y)$, welche in jedem innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegenen, endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$ ein eigentliches oder uneigentliches Doppelintegral zulässt. Das gemeinsame Zeichen der Gebiete $\mathfrak{G}$ wird dem gegebenen Gebiete $\mathfrak{F}$ beigelegt. Man kann das Zeichen von $\mathfrak{F}$ auch aus dem des Umlaufes längs seiner äusseren Begrenzung, die man sich im Unendlichen geschlossen denkt, ablesen. So bedeutet YOX in Fig. 19 auf S. 146 den positiven ersten Quadranten der Coordinatenebene.

Wir nennen die Zahl J das uneigentliche Doppelintegral der Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ und bezeichnen sie mit $S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\,dA$ unter der folgenden Bedingung. Jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ muss eine andere $\varrho > 0$ so entsprechen, dass, wenn die endliche (zusammenhängende oder aus getrennten Stücken in endlicher Anzahl bestehende) Fläche $\mathfrak{G}$ blos Punkte von $\mathfrak{F}$ und zwar zum Mindesten alle, deren Abstand von einem festen Punkte der Ebene, z. B. dem Anfangspunkte der Coordinaten, kleiner als ϱ ist, enthält, dann stets

$$|S_{\mathfrak{G}} f(x, y)\,dA - J| < \varepsilon \tag{1}$$

ist. Existirt das uneigentliche Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}}\,dA$, so wird es als die Zahl der ins Unendliche sich erstreckenden Fläche $\mathfrak{F}$ erklärt.

Aus der vorstehenden Erklärung des uneigentlichen Doppelintegrals J folgt dann unmittelbar der dem Satze in Nr. 3 entsprechende.

Wenn wir eine Fläche, die blos Punkte von $\mathfrak{F}$ enthält, als innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegen bezeichnen, so können wir sagen:

„Zum Vorhandensein des uneigentlichen Integrals $S_{\mathfrak{F}} f(x, y) dA$ ist nothwendig und hinreichend, dass jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ so entspricht, dass, wenn $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ irgend zwei endliche, innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Flächen bedeuten, die zum Mindesten alle Punkte von $\mathfrak{F}$, deren Abstand vom Anfangspunkte kleiner als ϱ ist, enthalten, alsdann stets

$$|S_{\mathfrak{G}} f dA - S_{\mathfrak{G}'} f dA| < \varepsilon \tag{2}$$

ist."

Diesen Satz haben wir jedoch durch den nachstehenden zu ersetzen.[1]) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung zum Vorhandensein von $S_{\mathfrak{F}} f(x, y) dA$ besteht darin, dass jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ so entspricht, dass für jede innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Fläche $\mathfrak{g}$, deren sämmtliche Punkte vom Anfangspunkte O mindestens den Abstand ϱ haben,

$$|S_{\mathfrak{g}} f(x, y) dA| < \varepsilon \tag{3}$$

ist."

Beweis. Angenommen es sei diese Bedingung erfüllt. Bedeuten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ irgend zwei innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene endliche Flächen, welche wenigstens alle Punkte von $\mathfrak{F}$, deren Abstand von O kleiner als ϱ, enthalten, und $\mathfrak{H}$ das ihnen gemeinsame Gebiet, während $\mathfrak{g}$ der Rest $\mathfrak{G} - \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}'$ der Rest $\mathfrak{G}' - \mathfrak{H}$ sein soll, so hat kein Punkt von $\mathfrak{g}$ und keiner von $\mathfrak{g}'$ einen kleineren Abstand von O als ϱ. Es ist mithin nach (3)

$$|S_{\mathfrak{g}}| < \varepsilon \quad |S_{\mathfrak{g}'}| < \varepsilon.$$

Andererseits hat man wie auf S. 129

$$S_{\mathfrak{G}} - S_{\mathfrak{G}'} = S_{\mathfrak{g}} - S_{\mathfrak{g}'},$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn nur zu den Flächen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ alle Punkte von $\mathfrak{F}$ gehören, deren Entfernung von O kleiner als ϱ ist, dann stets

$$|S_{\mathfrak{G}} - S_{\mathfrak{G}'}| \leqq |S_{\mathfrak{g}}| + |S_{\mathfrak{g}'}| < 2\varepsilon$$

ist. Mithin ist der Grenzwerth $S_{\mathfrak{F}} f(x, y) dA$ vorhanden.

Setzen wir aber voraus, dass die obige Bedingung nicht erfüllt sei, so muss zu jedem Zahlenpaar $\varepsilon > 0$ $\varrho > 0$

1) C. Jordan a. a. O. Nr. 78.

mindestens eine innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Fläche $\mathfrak{g}$ gehören, deren Punkte sämmtlich von O mindestens den Abstand ϱ haben und wofür $|S_{\mathfrak{g}}| \geqq \varepsilon$ ist. Nun sei $\mathfrak{G}$ ein endliches Gebiet innerhalb $\mathfrak{F}$, welches jedenfalls alle Punkte von $\mathfrak{F}$, die von O um weniger als ϱ abstehen, und die Fläche $\mathfrak{g}$ enthält, und $\mathfrak{G}'$ das Gebiet, welches von $\mathfrak{G}$ nach Wegnahme von $\mathfrak{g}$ übrig bleibt. Es gehören also zur Fläche $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} - \mathfrak{g}$ ebenfalls alle Punkte von $\mathfrak{F}$, deren Abstand von O kleiner als ϱ ist. Wir haben nun

$$|S_{\mathfrak{G}} - S_{\mathfrak{G}'}| = |S_{\mathfrak{g}}| \geqq \varepsilon. \tag{4}$$

Es giebt demnach, wie gross ϱ auch sein mag, zwei Flächen $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}'$ innerhalb $\mathfrak{F}$, welche beide mindestens alle Punkte von $\mathfrak{F}$, deren Abstand von O weniger als ϱ beträgt, enthalten und wofür gleichwohl die Beziehung (4) besteht. Mithin existirt über das Gebiet $\mathfrak{F}$ kein Doppelintegral der Function $f(x, y)$.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes und des Corollares, welches dem auf S. 130 entspricht[1]), kann man durch Betrachtungen, welche denen in Nr. 4 und 6 ganz ähnlich sind, den Sätzen auf S. 132, 134 und 141 vollkommen entsprechende erweisen. Sie lauten:

1) „Wechselt die Function $f(x, y)$ innerhalb des ins Unendliche sich erstreckenden Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen nicht, so hat sie ein Doppelintegral über dasselbe oder nicht, je nachdem es mindestens ein System von endlichen Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$, als deren Grenze bei

$$\lim \sigma = +0$$

dieses selbst erscheint, giebt, wofür

$$\lim_{\sigma=+0} S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f(x, y) dA$$

endlich oder unendlich ist. Und zwar ist im ersten Falle das Doppelintegral diesem Grenzwerthe gleich. Ist

---

1) Erstreckt sich die Linie $\mathfrak{q}$ a. a. O. ins Unendliche, so genügt es, dass jeder im Endlichen gelegene Theil derselben eine gewöhnliche Linie bildet.

$$f(x, y) \geqq 0,$$

so tritt dieser Fall dann und nur dann ein, wenn sämmtliche Integrale $S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f d\mathsf{A}$ unter einer endlichen Constanten H liegen."

„Gehört zur Fläche $\mathfrak{F}$ eine endliche Zahl $\mathfrak{F}$, so hat man die Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ so zu wählen, dass

$$\lim_{\sigma=+0} \mathfrak{G}(\sigma) = \mathfrak{F}$$

ist. Gehört aber zur Fläche $\mathfrak{F}$ keine endliche Zahl, so muss natürlich $\lim \mathfrak{G}(\sigma)$ bei $\lim \sigma = +0$ unendlich sein. Ausserdem muss, wenn ein beliebig gewählter Querschnitt, welcher von $\mathfrak{F}$ ein endliches Gebiet $\mathfrak{F}'$ abschneidet, von $\mathfrak{G}(\sigma)$ das Gebiet $\mathfrak{G}'(\sigma)$ abtrennt, stets

$$\lim_{\sigma=+0} \mathfrak{G}'(\sigma) = \mathfrak{F}'$$

sein."

2) Ein Satz gleichen Wortlautes mit dem auf S. 134.

3) „Wechselt die Function $f(x, y)$ innerhalb des in Rede stehenden Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen, so ist zum Vorhandensein des uneigentlichen Doppelintegrales der Function $f(x, y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ nothwendig und hinreichend, dass die Function $|f(x, y)|$ ein Doppelintegral über $\mathfrak{F}$ zulässt."

Der Beweis des Satzes 3) ist, wie bemerkt, ganz ähnlich dem des Satzes in Nr. 6. Da man hierbei ganz im Endlichen liegende Theile des ursprünglich gegebenen Integrationsgebietes weglassen darf, so braucht man nur zwei Fälle zu betrachten und zwar: 1) das Gebiet $\mathfrak{F}$ zerfällt in eine endliche Anzahl von Theilen, wovon keiner einen Zeichenwechsel von $f(x, y)$ aufweist; 2) lässt man von $\mathfrak{F}$ alle Punkte fort, deren Abstand vom Anfangspunkte eine beliebig vorgegebene Zahl ϱ überschreitet, so soll stets ein Gebiet übrig bleiben, das sich in eine endliche Anzahl von Theilen zerlegen lässt, in deren jedem $f(x, y)$ entgegengesetzt bezeichnete Werthe nicht annimmt. Der erstere entspricht der Annahme a), der letztere der c) in Nr. 6.

9. Allgemeine und besondere Beispiele. Zuerst führen wir zwei allgemeine Sätze vor.

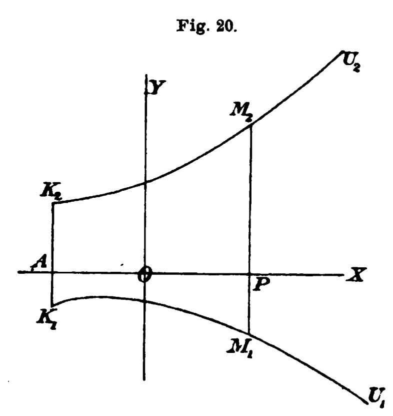
1. Satz. „Das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ sei die Gesammtheit der Punkte innerhalb des von einer zur Ordinatenaxe

parallelen Strecke $K_1 K_2$ (welche Punkte in einen zusammenfallen können) und den zwei ins Unendliche sich erstreckenden Curven $K_1 U_1$ und $K_2 U_2$, deren Punkte bezw. die Ordinaten

$$y_1 = \varphi_1(x) = PM_1, \quad y_2 = \varphi_2(x) = PM_2 \quad (x \geqq a = OA) \qquad (1)$$

haben, gebildeten Raumes (Fig. 20), dergestalt, dass jede zur y-Axe parallele Strecke $M_1 M_2$ vollständig zum Gebiete $\mathfrak{F}$ gehört. Die Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sind für jedes $x \geqq a$ eindeutig und stetig; jedes endliche Stück der Curven $K_1 U_1$ und $K_2 U_2$ ist eine gewöhnliche Linie. Wenn dann die Function $f(x, y)$ mindestens in allen eigentlichen Punkten von $\mathfrak{F}$, ausgenommen die von $K_1 K_2$, stetig ist und dabei innerhalb $\mathfrak{F}$ das Zeichen nicht wechselt, so hat sie ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ oder nicht, je nachdem das zweimalige Integral

Fig. 20.



$$\int_a^\infty dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \qquad (2)$$

vorhanden ist oder nicht. Und zwar ist im ersteren Falle das Doppelintegral ihm gleich. Umgekehrt: Je nachdem die Function $f(x, y)$ ein Doppelintegral über $\mathfrak{F}$ hat oder nicht, existirt das Integral (2) oder nicht.“

Der Beweis wird ähnlich geführt, wie beim Satze auf S. 135; man braucht nur an Stelle von $a' - \xi \quad 1 : \xi$ und von $a' + \infty$ zu setzen. Auf ähnliche Weise erhält man entsprechend dem Satze auf S. 145 den

2. Satz. „Wenn die Function $f(x, y)$ sich so verhält, wie im vorstehenden Satze, nur dass sie innerhalb des unendlichen Gebietes $\mathfrak{F}$ das Zeichen wechselt, so lässt sie ein uneigentliches Doppelintegral über $\mathfrak{F}$ zu oder nicht, je nachdem das zweimalige Integral

$$\int_a^\infty dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} |f(x, y)| dy$$

einen Sinn hat oder nicht. Im ersten Falle convergirt absolut das Integral (2) und es gilt auch hier die Formel

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y) dx dy = \int_a^\infty dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.\text{``} \tag{3}$$

Man kann diese Sätze leicht dahin verallgemeinern, dass sich auf jedem endlichen Stücke der Curve $K_1 U_1$, sowie auf jedem solchen der Curve $K_2 U_2$ eine endliche Anzahl von Punkten befindet, in deren jedes Umgebung $f(x, y)$ nicht endlich ist — und auch noch weiter (vgl. S. 136).

Als besonderen Fall der obigen beiden Sätze heben wir den hervor, dass das Gebiet $\mathfrak{F}$ der zur x-Axe parallele, unendliche Streifen $X'AB'X''$ (Fig. 2 auf S. 18) ist. Dann haben wir $\varphi_1(x) = b$ $\varphi_2(x) = b'$ zu setzen. — Ob auch die Gleichung

$$\iint_{(X'AB'X'')} f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^{b'} dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

besteht, lässt sich entweder dadurch, dass man in den obigen Sätzen x und y unter einander vertauscht, oder durch die Sätze in XVI. 4 und XVIII. 15 ermitteln.

Nun mögen einige **Beispiele** folgen, theils besondere Fälle der vorstehenden Sätze, theils auf Gebiete sich beziehend, welche in den Richtungen beider Coordinatenaxen ins Unendliche ausgedehnt sind.

1) „Die auf S. 136 betrachtete Function $1 : (x + \alpha y)^\mu$ hat über den unbegrenzten rechten Winkel XPY_1 (Fig. 16 auf S. 137) ein Doppelintegral oder nicht, je nachdem μ grösser als 2 ist oder nicht.“ Um dies einzusehen, lassen wir in den Formeln für das Doppelintegral dieser Function über das Rechteck $PACM$

$$\iint_{(PACM)} \frac{dx\,dy}{(x + \alpha y)^\mu} = \frac{1}{(\mu - 1)(\mu - 2)\alpha} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{[a(1 + \alpha)]^{\mu - 2}} - \frac{1}{(\xi + \alpha a)^{\mu - 2}} - \frac{1}{a^{\mu - 2}} + \frac{1}{\xi^{\mu - 2}} \right\},$$

giltig im Falle, dass μ von 1 und 2 verschieden ist,

$$\iint_{(PACM)} \frac{dx\,dy}{(x+\alpha y)^2} = \frac{1}{\alpha}\left\{ l(\xi+\alpha a) - l(1+\alpha) - l\xi \right\},$$

$$\iint_{(PACM)} \frac{dx\,dy}{x+\alpha y} = \frac{a}{\alpha}\left\{(1+\alpha)\,l(1+\alpha) - \alpha\, l\left(\frac{\xi}{a}+\alpha\right) - \frac{\xi}{a}(l\xi+\alpha a) - \frac{\xi l \xi}{a}\right\}$$

(welche mittelst der Formeln (b) (c) a. a. O. leicht abzuleiten sind), $a = OA$ ins Unendliche wachsen, während ξ festbleibt. Dann liefert nur die erste und zwar nur im Falle, dass $\mu > 2$ ist, einen endlichen Grenzwerth. Unter dieser Voraussetzung gilt mithin die Formel

$$\iint_{(Y_1 PX)} \frac{dx\,dy}{(x+\alpha y)^\mu} = \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)\,\alpha\,\xi^{\mu-2}}.$$

2) Die nämliche Function hat über den unbegrenzten Winkel YQU (Fig. 16) kein Doppelintegral. Dies können wir aus den Formeln (e) — (g) a. a. O. entnehmen, indem wir η als fest ansehen und a ins Unendliche wachsen lassen. Dann hat in keiner die rechte Seite einen endlichen Grenzwerth.

3) Die öfters erwähnte Function

$$\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$

lässt über den zur x-Axe parallelen Streifen X_1NPX (Fig. 16), innerhalb dessen sie negativ ist, sowie über den zur y-Axe parallelen Streifen $YSNY_1$ ein Doppelintegral zu. In der That haben wir zufolge der Formeln (b) auf S. 146 und des 2. Satzes auf S. 89 z. B.

$$\iint_{(PATN)} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy = \operatorname{arc\,tan}\frac{\xi}{a} - \frac{\pi}{4} = J(a),$$

somit

$$\iint_{(X_1NPX)} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy = \lim_{a=+\infty} J(a) = -\frac{\pi}{4}.$$

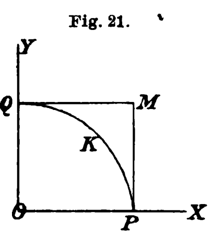
Die nämliche Function hat aber kein Doppelintegral über den unbegrenzten rechten Winkel X_1CY_1 (Fig. 19 auf S. 146). Dies ergiebt sich schon aus der Formel (c) auf S. 146 für ihr eigentliches Doppelintegral über das Gebiet $CRMS$. Lässt man den Punkt M auf dem Halbstrahle r, dessen Anomalie $X\hat{O}M = \Theta$ ist, ins Unendliche rücken, setzt also $\eta = \xi \tan\Theta$ und nimmt $\lim \xi = +\infty$, so erhält man

$$\lim_{\xi=+\infty} \iint_{(CRMS)} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy = \Theta - \frac{\pi}{4},$$

d. i. einen Grenzwerth, der vom Winkel Θ abhängt. Dass es kein Doppelintegral über den Winkelraum X_1CY_1 für unsere Function giebt, erklärt sich auch daraus, dass sie, wie leicht nachzuweisen ist, weder über den Winkelraum X_1CV, innerhalb dessen sie durchaus negativ ist, noch über den Winkelraum VCY_1, innerhalb dessen sie durchaus positiv ist, ein Doppelintegral zulässt.

4) Die Gleichung (m) auf S. 139 gilt auch im Falle, dass eines oder beide Intervalle (a, a'), (b, b') unendlich sind, wofern nur die Integrale (l) a. a. O. existiren und als Gebiet für das Doppelintegral von $f(x)g(y)$ genommen wird die Gesammtheit der Punkte in der Coordinatenebene, deren Abscissen dem Intervalle (a, a') und deren Ordinaten dem Intervalle (b, b') angehören. Der Beweis wird ganz so wie dort geführt, nur dass man in (n) entsprechend dem Werthe $\pm\infty$ $\pm 1:\xi$ bezw. $\pm 1:\eta$ als Grenze im betreffenden Integrale rechts setzt. So finden wir z. B. für die Function $e^{-x^2-y^2}$, wenn wir zunächst ihr Doppelintegral über das Quadrat $OPMQ$ mit der Seite $OP = X$ (Fig. 21) berechnen, nach dem 2. Satze auf S. 91

Fig. 21.



$$\iint_{(OPMQ)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^X e^{-x^2}dx \cdot \int_0^X e^{-y^2}dy = \left\{\int_0^X e^{-x^2}dx\right\}^2.$$

Lässt man X ins Unendliche wachsen, so hat $\int_0^X e^{-x^2}dx$ nach S. 418 d. I. T. einen endlichen Grenzwerth λ; also erhalten wir

$$\iint_{(YOX)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lambda^2.$$

Das Integrationsgebiet ist der von den positiven Coordinatenaxen gebildete rechte Winkel XOY.

Mit Hilfe dieses uneigentlichen Doppelintegrals lässt sich λ wiederum berechnen.[1]) Ziehen wir von O aus einen Kreis mit dem Radius $OP = X$, so haben wir auch

$$\lambda^2 = \lim_{X=+\infty} \iint_{(OPKQ)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Das Gebiet für das letzte, eigentliche Integral ist der erste Quadrant des genannten Kreises. Führen wir darin anstatt x, y die Polarcoordinaten r, θ ein, so erhalten wir nach der Formel (8) auf S. 113 die Gleichung

$$\iint_{(OPKQ)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^X e^{-r^2}r\,dr = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-X^2}}{2}.$$

Somit ist

$$\lambda^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ also } \lambda = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (vgl. S. 6).}$$

Auch die Gleichung (d) im Satze 3) auf S. 147 gilt im Falle, dass eines oder beide Intervalle (a, a'), (b, b') unendlich sind, wofern nur die Integrale $\int_a^{a'} f(x)\,dx$, $\int_b^{b'} g(x)\,dx$ absolut convergiren.

---

1) Poisson, Traité de mécanique 2. éd. 1833 § 512.

5) „Die Function

$$f(x, y) = e^{-ay} \cos x \sin xy : x \quad (a > 0) \tag{4}$$

lässt **kein** Doppelintegral über den unbegrenzten, von den positiven Coordinatenaxen gebildeten rechten Winkel XOY zu." Wir haben also zu zeigen, dass der absolute Betrag von $f(x, y)$

$$|f(x, y)| = e^{-ay} |\cos x \sin xy| : x \quad (a > 0) \tag{5}$$

kein Doppelintegral über XOY liefert. Kürzer als der direkte Beweis dieses Satzes gestaltet sich der nachstehende indirekte. Wäre das Doppelintegral der Function (5) über $X\hat{O}Y$ vorhanden, so müsste auch das von der in keinem Punkte x, y grösseren Function

$$e^{-ay} \cos x^2 \sin xy^2 : x \tag{6}$$

vorhanden sein (S. 158). Es lässt aber diese Function, wie wir sogleich sehen werden, kein Doppelintegral über den Winkel XOY zu, folglich auch nicht die Function (5).

Die Function (6) liefert nicht einmal ein uneigentliches Doppelintegral über den unbegrenzten rechten Winkel XPY_1 (Fig. 16 auf S. 137). Um dies nachzuweisen, berechnen wir das eigentliche Doppelintegral derselben über das Rechteck $PACM$, wobei wir uns hier $OP = c$ (> 0) und $OA = OB = X$ denken und dieses Doppelintegral selbst mit $J(X)$ bezeichnen. Bemerken wir, dass

$$\cos x^2 \sin xy^2 = \frac{1}{2} \cos x^2 (1 - \cos 2xy) = \frac{1 + \cos 2x}{4} - \frac{1}{2} \cos x^2 \cos 2xy$$

ist, so finden wir

$$J(X) = \frac{1}{4} \int_c^X \frac{1 + \cos 2x}{x} dx \cdot \int_0^X e^{-ay} dy - \frac{1}{2} \int_c^X \frac{\cos x^2}{x} dx \int_0^X e^{-ay} \cos 2xy\, dy. \tag{7}$$

Nun ist

$$\int_0^X e^{-ay} dy = (1 - e^{-aX}) : a$$

und zufolge der Formel (7a) auf S. 267 d. I. T.

$$\int_0^X e^{-ay} \cos 2xy\, dy = \frac{e^{-aX}(2x \sin 2xX - a \cos 2xX)}{a^2 + 4x^2} + \frac{a}{a^2 + 4x^2}.$$

Demnach erhalten wir nach (7), indem wir noch einmal

$$\cos x^2 = (1 + \cos 2x) : 2$$

setzen,

$$\left.\begin{aligned} J(X) = \frac{1 - e^{-aX}}{4a} l\left(\frac{X}{c}\right) + \frac{1 - e^{-aX}}{4a} \int_c^X \frac{\cos 2x}{x} dx - \frac{a}{4} \int_c^X \frac{dx}{(a^2 + 4x^2)x} \\ - \frac{a}{4} \int_c^X \frac{\cos 2x\, dx}{x(a^2 + 4x^2)} - \frac{e^{-aX}}{2} \int_c^X \frac{\cos x^2}{x} \frac{2x \sin 2xX - a \cos 2xX}{a^2 + 4x^2} dx. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nehmen wir hier den Grenzübergang $\lim X = +\infty$ vor, so hat das erste Glied den Grenzwerth $+\infty$, alle vier übrigen aber je einen endlichen Grenzwerth, es ist somit

$$\lim_{X=+\infty} J(X) = +\infty,$$

d. h. die Function (6) liefert kein uneigentliches Doppelintegral über den Winkel XPY_1. — Dass das zweite und vierte Glied auf der rechten Seite von (8) bei $\lim X = +\infty$ je einen endlichen Grenzwerth besitzen, folgt aus X. 12, hinsichtlich des dritten ergiebt sich dies aus dem Satze 2) auf S. 405 d. I. T. Und bezüglich des letzten brauchen wir nur zu bemerken, dass

$$|\,2x \sin 2xX - a \cos 2xX\,| \leqq \sqrt{a^2 + 4x^2},$$

somit die Function unter dem $\int$ dem Betrage nach kleiner ist als

$$1 : x\sqrt{a^2 + 4x^2}.$$

Nun existirt nach dem zuletzt angeführten Satze

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + 4x^2}},$$

also nach dem 6. Satze auf S. 395 d. I. T. auch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x^2}{x} \cdot \frac{|\,2x \sin 2xX - a \cos 2xX\,|}{a^2 + 4x^2}\, dx.$$

Weitere Beispiele s. S. 182 und 184, 1).

10. Allgemeine Sätze über die uneigentlichen Doppelintegrale.

Auch für diese gelten die in XVII. 7 aufgezählten Sätze, vorausgesetzt nur, dass die darin vorkommenden Doppelintegrale existiren. Dieser Umstand rechtfertigt erst die Bezeichnung „uneigentliche“ Doppelintegrale für die in Nr. 1—9 betrachteten Grenzwerthe von eigentlichen Doppelintegralen. Es bezeichne nunmehr $\mathfrak{F}$ ein beliebiges Gebiet, entweder völlig im Endlichen gelegen oder sich ins Unendliche erstreckend, von dessen Begrenzung jeder endliche Theil eine einfache gewöhnliche Linie bildet und worin die im Folgenden auftretenden Functionen sich so verhalten, wie es am Anfange von Nr. 1 bezw. 8 angegeben ist.

1) Existirt das uneigentliche Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}} f dA$, so auch $S_{(-\mathfrak{F})} f dA$ und es ist

$$S_{(-\mathfrak{F})} f(x, y)\, dA = - S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA. \qquad (1)$$

2) Unter der nämlichen Voraussetzung existirt auch das Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}}\, C f dA$, wo C eine Constante bezeichnet, und es ist

$$S_{\mathfrak{F}}\, C f(x, y)\, dA = C S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA. \qquad (2)$$

Und umgekehrt.

3) Existiren die Doppelintegrale $S_{\mathfrak{F}} f_1 dA$ und $S_{\mathfrak{F}} f_2 dA$, so auch $S_{\mathfrak{F}}(f_1 + f_2) dA$ und es ist

$$S_{\mathfrak{F}}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] dA = S_{\mathfrak{F}} f_1(x, y) dA + S_{\mathfrak{F}} f_2(x, y) dA. \quad (3)$$

4) Bleibt ungeändert, wofern nur das uneigentliche Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}} f dA$ vorhanden ist.

Diese Sätze werden in der Art bewiesen, dass man ein System von Flächen $\mathfrak{G}(\sigma)$ betrachtet, welche bei $\lim \sigma = +0$ in das gegebene Gebiet $\mathfrak{F}$ übergehen (S. 127, 150). Da zum Gebiete $\mathfrak{G}(\sigma)$ ein eigentliches Doppelintegral der Functionen $f(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ gehören soll, so kann man dafür die Sätze 1)—4) in XVII. 7 anschreiben. Lässt man alsdann σ zum Grenzwerthe $+0$ convergiren, so erhält man die soeben aufgeführten Sätze.

5) Das bereits auf S. 130 und 150 angeführte Corollar.

Der Satz 6) bleibt ungeändert. Denn da

$$S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f dA \geqq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\sigma = +0} S_{\mathfrak{G}(\sigma)} f dA = S_{\mathfrak{F}} f dA$$

ist, so hat man auch

$$S_{\mathfrak{F}} f dA \geqq 0 \quad (4)$$

u. s. w.

Aus dem 6. Satze folgt dann sofort der 7. Satz a. a. O., wobei vorauszusetzen ist, dass die Functionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ je ein uneigentliches Doppelintegral über das positive Gebiet $\mathfrak{F}$ zulassen. — Ist durchweg in $\mathfrak{F}$

$$f(x, y) \geqq g(x, y) \geqq 0, \quad (5)$$

so folgt aus der Existenz des Doppelintegrals $S_{\mathfrak{F}} f dA$ von selbst die des zweiten $S_{\mathfrak{F}} g dA$, wie sich unmittelbar aus dem Satze auf S. 132 ergiebt. Der Satz lässt, wie sich auf ähnlichem Wege oder durch einen indirecten Beweis ergiebt, die folgende Umkehrung zu: „Wenn bei Bestehen der Beziehung (5) für alle Punkte x, y innerhalb $\mathfrak{F}$ das Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}} g dA$ nicht vorhanden ist, so ist auch $S_{\mathfrak{F}} f dA$ nicht vorhanden.“

8) „Hat die Function $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ ein uneigentliches Doppelintegral, so ist neben $\mathfrak{F} > 0$

$$| S_{\mathfrak{F}} f dA | \leqq S_{\mathfrak{F}} |f| dA. \quad (6)$$

Der übrige Theil und der Beweis des Satzes bleiben unverändert. Ebenso der Satz 9), wenn angenommen wird,

dass $f(x, y)$ ein Doppelintegral über $\mathfrak{J}$ zulässt (vgl. S. 143). Der Satz 10) gilt hier nur, wenn das Gebiet $\mathfrak{J}$ ein unendliches mit einer endlichen Zahl (S. 148) ist und die Function $f(x, y)$ darin endlich bleibt.

11) An Stelle des Satzes 11) a. a. O., der jetzt nicht mehr allgemein gilt[1]), tritt der folgende:

α) „Wenn die Function $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{J}$ endlich ist und über jedes endliche Gebiet $\mathfrak{G}$, das einen Theil des Gebietes $\mathfrak{J}$ bildet, ein eigentliches Doppelintegral besitzt, die Function $\varphi(x, y)$ aber ein uneigentliches Doppelintegral über $\mathfrak{J}$ zulässt, so hat auch die Function $f(x, y) \cdot \varphi(x, y)$ eines."

β) „Liegt aber $|f(x, y)|$ für jeden Punkt von $\mathfrak{J}$ über einer und derselben positiven Zahl und $\varphi(x, y)$ lässt kein uneigentliches Doppelintegral über $\mathfrak{J}$ zu, so auch $f(x, y) \cdot \varphi(x, y)$ nicht."

Beweis. Nach den Voraussetzungen in α) giebt es eine solche positive Zahl C, dass für jeden Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$ $|f(x, y)| < C$ ist. Demnach ist dafür

$$|f(x, y)\, \varphi(x, y)| < C\,|\varphi(x, y)|.$$

Nun soll $S_{\mathfrak{J}}|\varphi|\,dA$, also auch $S_{\mathfrak{J}}C|\varphi|\,dA$ vorhanden sein; mithin existirt nach dem bei Gelegenheit des 7. Satzes Bemerkten auch $S_{\mathfrak{J}}|f\varphi|\,dA$. — Auf ähnliche Art ergiebt sich der Satz β).

12) „Existiren die uneigentlichen Doppelintegrale

$$S_{\mathfrak{G}}\,\varphi(x, y)\,dA \qquad S_{\mathfrak{J}}\,f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dA$$

und wechselt $\varphi(x, y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein Zeichen nicht, so liegt das zweite nicht ausserhalb des von den Zahlen

$$k\,S_{\mathfrak{J}}\,\varphi(x, y)\,dA \quad \text{und} \quad g\,S_{\mathfrak{J}}\,\varphi(x, y)\,dA \tag{7}$$

gebildeten Intervalles, wo g die obere, k die untere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{J}$ bezeichnet. Ist eine von diesen Grenzen unendlich, so ist die entsprechende der Zahlen (7) durch ∞ mit dem Zeichen von $\pm S_{\mathfrak{J}}\,\varphi\,dA$ zu

---

1) Z. B. Nach S. 136 hat die Function $1:(x+\alpha y)^{\mu}$ ($\mu > 0$) ein Doppelintegral über das Quadrat $OACB$ nur, falls $\mu < 2$ ist; ihr Quadrat $1:(x+\alpha y)^{2\mu}$ also nur, falls $2\mu < 2$ d. i. $\mu < 1$ ist.

ersetzen, worin das obere oder untere Zeichen steht, je nachdem $g = +\infty$ oder $k = -\infty$ ist.“ — Der Satz wird wie der entsprechende auf S. 80 bewiesen.

„Ist $f(x, y)$ wenigstens für alle Punkte innerhalb $\mathfrak{F}$ stetig, so gilt auch hier der Mittelwerthsatz, d. i. die Formel (22) a. a. O.“ — Sind die Zahlen k, g beide endlich und werden sie von $f(x, y)$ je in einem Punkte innerhalb $\mathfrak{F}$ oder in einem solchen der Begrenzung von $\mathfrak{F}$, wo $f(x, y)$ stetig ist, erreicht, so ergiebt sich der Satz so wie a. a. O. Giebt es aber blos auf der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ einen Punkt, in dessen Umgebung die obere (untere) Grenze von $f(x, y)$ g (k), die jetzt auch $+\infty$ $(-\infty)$ sein kann, ist, oder tritt beides zugleich ein, so verfahre man, um den Mittelwerthsatz zu beweisen, ähnlich wie im I. T. S. 374 und 397.

Die Verwandlung der uneigentlichen Doppelintegrale in zweimalige Integrale.[1])

Uneigentliche Doppelintegrale über ein endliches Gebiet.

11. Wir können uns auf die Annahme beschränken, dass das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ nur einen Rand $\mathfrak{r}$ hat, welcher von jeder Parallelen zur Ordinatenaxe höchstens in zwei, von jeder Parallelen zur Abscissenaxe höchstens in einer bestimmten Anzahl von Punkten geschnitten wird. $\mathfrak{F}$ sei also die in Fig. 10 auf S. 82 dargestellte Fläche. Die

1) Dirichlet bemerkte 1839 (vgl. W. I. S. 395), dass, wenn das Doppelintegral $S_{\mathfrak{F}}\,|f(x, y)|\,d\mathsf{A}$ einen endlichen Werth besitzt, das Integral $S_{\mathfrak{F}}\,f(x, y)\,d\mathsf{A}$ stets einen bestimmten endlichen Werth hat, welcher von der Ordnung, in welcher die Integrationen ausgeführt werden, unabhängig ist. Erst de la Vallée-Poussin ist es gelungen, diese Behauptung im Falle, dass $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ sein Zeichen nicht wechselt, in dem Sinne zu beweisen, dass, wenn eines von den zu $S_{\mathfrak{F}}\,f(x, y)\,d\mathsf{A}$ gehörigen zweimaligen Integralen einen bestimmten Werth hat, dieser dem des Doppelintegrals gleich ist (vgl. u. S. 174). Zu diesem Ende ist es unerlässlich, von dem allgemeinen Begriffe des absolut convergenten einfachen bestimmten Integrals (vgl. Nachtrag III) Gebrauch zu machen.

äussersten Werthe der Abscissen ihrer Punkte seien wie dort mit $a = OA$ und $a' = OA'$ und die Ordinaten der zur Abscisse $x = OP$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{r}$ mit

$$y_1 = \varphi_1(x) = PM_1 \quad \text{und} \quad y_2 = \varphi_2(x) = PM_2$$

bezeichnet. Für jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ sei eine Function $f(x, y)$ eindeutig erklärt, welche im Gebiete $\mathfrak{F}$ nicht endlich, jedoch mindestens bei jedem Punkte innerhalb $\mathfrak{F}$ stetig ist.

In dem besonderen Falle, dass die Function $f(x, y)$ nur in der Umgebung der Punkte der Strecken K_1K_2, L_1L_2 und ausserdem höchstens in der Umgebung der Punkte eines Systems 1. Gattung auf $K_1M_1L_1$ und der eines solchen auf $K_2M_2L_2$ nicht endlich ist, haben wir die in Rede stehende Umformung des Doppelintegrals bereits vornehmen können (vgl. S. 135 und 145). Der dort eingeschlagene Weg würde indess nicht zur Erledigung des Falles führen, dass $f(x, y)$ in der Umgebung keines einzigen Punktes der Curve $K_1M_1L_1$ oder $K_2M_2L_2$ endlich ist.

Es giebt über die Umformung des uneigentlichen Doppelintegrals

$$\int\int_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy$$

in ein zweimaliges Integral zwei Sätze, von denen der eine eine gewisse Verallgemeinerung der gleichmässigen Convergenz des Integrals

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \tag{1}$$

im Intervalle (a, a') von x, der andere die im Allgemeinen gleichmässige (s. u.) Convergenz des Integrals

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\, dy \tag{2}$$

für den nämlichen Bereich von x als bestehend voraussetzt. Der erste Satz ist leichter zu erlangen als der zweite, welcher von de la Vallée-Poussin herrührt; der zweite (s. S. 174 7. Satz) bietet aber ein weit allgemeineres Ergebniss und verdient daher den Vorzug vor dem ersten.

Der erste Satz[1]) lautet folgendermassen:

„Nehmen wir an: 1) Die Function $f(x, y)$ sei mindestens in jedem Punkte innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ (Fig. 10 auf S. 82) stetig in Bezug auf x und y und lasse ein uneigentliches Doppelintegral über dieses Gebiet zu.“

„2) Jeder gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ soll eine andere $\delta > 0$ so entsprechen, dass, wenn die positive Zahl η kleiner als δ ist, alsdann stets sowohl

$$\left| \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(x, y)\, dy \right| < \varepsilon X_1(x), \tag{2a}$$

als auch

$$\left| \int_{y_2-\eta}^{y_2} f(x, y)\, dy \right| < \varepsilon X_2(x) \tag{2b}$$

ist, was auch x für ein Werth zwischen a und a' sein mag. Dabei bedeuten $X_1(x)$ $X_2(x)$ eindeutige positive Functionen von x, welche in jedem Intervalle (c, c') $(a < c < c' < a')$ endlich und von $x = a$ bis $x = a'$ eigentlich oder uneigentlich integrirbar sind.“

„Alsdann existirt nicht allein das Integral (1) für jedes x zwischen a und a', sondern auch das zweimalige Integral

$$\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Und es ist das letztere gleich dem Doppelintegrale

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy \; (= J).“ \tag{4}$$

Wir können es dabei bewenden lassen, diesen Satz anzuführen.

Bevor wir zur Ableitung des zweiten übergehen, haben wir den Begriff der für das Intervall (a, a') von x im Allgemeinen gleichmässigen Convergenz des Integrals (2)[2]) zu erklären.

---

1) Vgl. C. Jordan, C. d. Analyse 2. éd. II Nr. 86—89. Dort steht jedoch in den Formeln (2a) und (2b) anstatt $f(x, y)$ $|f(x, y)|$, was nicht nöthig ist.

2) Dieser Begriff wurde eingeführt von U. Dini, Grundlagen § 91 A. Harnack, Math. Ann. XIX. S. 257.

„Lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, dass, wenn nur die positive Zahl η kleiner als δ ist, alsdann sowohl

$$\int_{y_1}^{y_1+\eta} |f(x, y)|\, dy < \varepsilon,$$

als auch

$$\int_{y_2-\eta}^{y_2} |f(x, y)|\, dy < \varepsilon$$

ist für alle x in jedem Theile der Strecke (a, a'), welcher keinen Punkt eines discreten (vgl. Nachtrag I) Punktsystems $\mathfrak{M}_\varepsilon$ (das mit der Zahl ε sich ändern kann) enthält, so heisst das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\, dy$$

im Allgemeinen gleichmässig convergent für das endliche Intervall (a, a') von x.

12. 1. Hilfssatz.[1]) „Es sei die Function $f(x, y)$ im endlichen Gebiet $\mathfrak{F}$ nicht endlich, dabei aber bei jedem Punkte innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ (Fig. 10) stetig in Bezug auf x und y.“

„Ferner gebe es zwei positive Zahlen α und δ derart, dass, wenn nur die positive Zahl η kleiner als δ und dabei $y_1 + \eta \leqq y_2$, $y_2 - \eta \geqq y_1$ ist, bei jedem x zwischen a und a' sowohl

$$\left.\begin{aligned} &\int_{y_1}^{y_1+\eta} |f(x, y)|\, dy < \alpha, \\ \text{als auch} \quad &\int_{y_2-\eta}^{y_2} |f(x, y)|\, dy < \alpha \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ist. — Alsdann existirt das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy$$

und es liegen, wenn J sein Werth ist, das obere und untere Integral von

1) Er entspricht dem Lemma von de la Vallée-Poussin a. d. a. S. 124 a. O. Nr. 31.

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \tag{6}$$

als Functionen von x, über das Intervall (a, a') erstreckt, zwischen den Grenzen

$$J - 2\alpha(a' - a) \quad \text{und} \quad J + 2\alpha(a' - a),$$

diese Grenzen eingeschlossen."

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\, dy \tag{7}$$

eine im Intervalle (a, a') von x endliche Function ist. Construiren wir nämlich die beiden Curven

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi_1(x) + \eta = y_1 + \eta, \\ y = \varphi_2(x) - \eta = y_2 - \eta \end{array}\right\} (a \leqq x \leqq a'), \tag{7*}$$

worin η eine feste Zahl kleiner als δ bedeutet, so schliessen sie ein Gebiet $\mathfrak{F}'$ ein, in welchem $|f(x, y)|$ allenthalben stetig ist. Daher ist (vgl. S. 443 d. I. T.)

$$\int_{y_1 + \eta}^{y_2 - \eta} |f(x, y)|\, dy$$

eine im Intervalle (a, a') von x stetige Function, somit unter einer gewissen Zahl H gelegen. Das Integral (7) ist also nach (5) stets kleiner als $H + 2\alpha = G$. — Aus der Endlichkeit des Integrals (7) im Intervalle (a, a') von x folgt unmittelbar die des Integrals (6) im nämlichen Bereiche von x.

Hieraus ergiebt sich nach den Sätzen auf S. 132 und 141 sofort, dass die Function $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ ein Doppelintegral zulässt. Denn wir finden nach dem 2. Satze auf S. 89, wenn nur $0 < \eta < \delta$ ist,

$$\left.\begin{array}{l} J' = \displaystyle\iint_{(\mathfrak{F}')} |f(x, y)|\, dx\, dy \\ \quad = \displaystyle\int_a^{a'} dx \int_{y_1 + \eta}^{y_2 - \eta} |f(x, y)|\, dy < G(a' - a). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Sollten die Punkte K_1 und K_2 oder L_1 und L_2 zusammenfallen, so müsste hier a durch eine grössere Zahl c,

oder a' durch eine kleinere c' ersetzt werden, was auf das Endergebniss keinen Einfluss hat. c und c' sind die Abscissen der Punkte, worin sich in diesem Falle die Curven (7*) schneiden.

Setzen wir

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_1+\eta} f\,dy + \int_{y_1+\eta}^{y_2-\eta} f\,dy + \int_{y_2-\eta}^{y_2} f\,dy,$$

so ergiebt sich, dass[1])

$$\left.\begin{aligned}\int_a^{(1)a'} dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \leqq \int_a^{(1)a'} dx\int_{y_1}^{y_1+\eta} f\,dy\\ +\int_a^{a'} dx\int_{y_1+\eta}^{y_2-\eta} f\,dy + \int_a^{(1)a'} dx\int_{y_2-\eta}^{y_2} f\,dy\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\int_a^{(2)a'} dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \geqq \int_a^{(2)a'} dx\int_{y_1}^{y_1+\eta} f\,dy\\ +\int_a^{a'} dx\int_{y_1+\eta}^{y_2-\eta} f\,dy + \int_a^{(2)a'} dx\int_{y_2-\eta}^{y_2} f\,dy\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ist. Nach (5) ist

$$\int_{y_1}^{y_1+\eta} f\,dy \leqq \int_{y_1}^{y_1+\eta} |f|\,dy < \alpha,$$

ebenso ist

$$\int_{y_2-\eta}^{y_2} f\,dy < \alpha;$$

also hat man

$$\int_a^{(1)a'} dx\int_{y_1}^{y_1+\eta} f\,dy < \alpha(a'-a),$$

$$\int_a^{(1)a'} dx\int_{y_2-\eta}^{y_2} f\,dy < \alpha(a'-a).$$

Demnach erhält man aus (9) mit Rücksicht auf (8) die Ungleichung

$$\int_a^{(1)a'} dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy < J' + 2\alpha(a'-a). \quad (11)$$

---

1) Vgl. Nachtrag II. 3.

Auf ähnliche Art folgt aus (10) die Ungleichung

$$\int_a^{(2)a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy > J' - 2\alpha(a' - a). \qquad (12)$$

Nun hat J' bei $\lim \eta = +0$ den Grenzwerth J, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta' > 0$ so gehört, dass, wenn nur $0 < \eta < \delta'$ ist, alsdann

$$J - \varepsilon < J' < J + \varepsilon$$

ist. Also hat man nach (11)

$$\int_a^{(1)a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy < J + 2\alpha(a' - a) + \varepsilon;$$

bei der Willkürlichkeit von ε ist mithin

$$\int_a^{(1)a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \leqq J + 2\alpha(a' - a). \qquad (13)$$

Aus (12) ergiebt sich auf ähnliche Weise die Beziehung

$$\int_a^{(2)a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \geqq J - 2\alpha(a' - a). \qquad (14)$$

Die Beziehungen (13) und (14) führen nun unmittelbar zu unserem Satze, weil jedes untere Integral seiner Erklärung nach nicht grösser sein kann, als das obere der nämlichen Function.

Die Formeln (13) und (14) sind auch im Falle, dass die Punkte K_1 und K_2 oder L_1 und L_2 sich decken, richtig. Zur Ableitung derselben setzt man jetzt zunächst

$$\int_a^{(1)a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f dy = \left\{ \int_a^{(1)c} + \int_c^{(1)c'} + \int_{c'}^{(1)a'} \right\} dx \int_{y_1}^{y_2} f dy.$$

Das erste Integral rechts ist kleiner als $2\alpha(c - a)$, das dritte kleiner als $2\alpha(a' - c')$. Wendet man alsdann auf das zweite Integral die Ungleichung (11) an, wobei an Stelle von a, a' bezw. c, c' treten, und addirt die soeben erhaltenen Ungleichungen, so gelangt man wieder zur Formel (11); u.s.w.

2. Corollar. „Der vorstehende Satz ist von selbst erfüllt, wenn das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy$$

eine im Intervalle von $x = a$ bis $x = a'$ endliche Function von x bildet." Denn nunmehr giebt es eine Constante $\alpha > 0$ derart, dass schon der Werth des soeben erwähnten Integrales selbst für jedes x im Intervalle (a, a') kleiner als α ist. Man darf somit als Zahl δ den Unterschied der äussersten Werthe unter den Ordinaten der Punkte von $\mathfrak{F}$ d. i. $b' - b$ nehmen.

3. Corollar. „Darf in den Ungleichungen (5) α jede positive Zahl sein, so ist das Integral (6) nach x im Intervalle (a, a') integrirbar und zwar ist

$$\int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy = J."$$

Denn es liegt sowohl das untere, als auch das obere Integral der Function (6) von $x = a$ bis $x = a'$ zwischen den Grenzen

$$J - 2\alpha(a' - a) \quad \text{und} \quad J + 2\alpha(a' - a).$$

Da somit nunmehr der Unterschied des einen, wie des andern, von J dem Betrage nach kleiner ist als $2\alpha(a' - a)$, d. i. als jede beliebige Zahl, so sind sie beide gleich J.

13. 4. Satz.[1]) „Wenn das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy \tag{15}$$

im Allgemeinen gleichmässig im Intervalle (a, a') von x convergirt und darin eine endliche Function von x bildet, so existirt sowohl das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f \, dx \, dy,$$

als auch das zweimalige Integral

1) De la Vallée-Poussin a. a. O. Nr. 32.

$$\int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \tag{16}$$

und zwar besteht die Gleichung

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy. \text{“} \tag{17}$$

Beweis. ε sei eine gegebene positive Zahl. Ueber die Punkte der Menge $\mathfrak{M}_s$ in der Strecke von $x = a$ bis $x = a'$ werde eine Schaar von positiven Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ in der Weise ausgebreitet, dass nach Entfernung derselben aus der Strecke $a' - a$ nur Strecken übrig bleiben, welche keinen Punkt von $\mathfrak{M}_s$ weder im Innern, noch an den Grenzen enthalten. Die letzteren Strecken seien der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$ und die Abscissen ihrer dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte mit $b_1, b_2 \ldots b_{k_n}$ bezeichnet. Durch die Endpunkte aller Strecken δ_r ziehen wir die Parallelen zur y-Axe, wodurch aus der Fläche $\mathfrak{F}$ $k_n (\leqq n + 1)$ Parallelstreifen $\mathfrak{F}_r$ herausgeschnitten werden. In jedem von ihnen erfüllt die Function $f(x, y)$ die Bedingungen der obigen Sätze 1) und 3). Wir haben daher für das obere Integral

$$S_{(\mathfrak{F}_r)} f(x, y)\, dA - 2\varepsilon\varepsilon_r \leqq \int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} dx \int_{y_1}^{y_2} f\, dy \leqq S_{(\mathfrak{F}_r)} f(x, y)\, dA + 2\varepsilon\varepsilon_r$$

$$(r = 1, 2 \ldots k_n),$$

somit für die Summe dieser oberen Integrale, da

$$\sum \varepsilon_r \leqq a' - a$$

ist,

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^{k_n}{}_r S_{(\mathfrak{F}_r)} f\, dA - 2\varepsilon(a' - a) &\leqq \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} dx \int_{y_1}^{y_2} f\, dy \\ &\leqq \sum_1^{k_n}{}_r S_{(\mathfrak{F}_r)} f\, dA + 2\varepsilon(a' - a). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die Summe σ der Theile $\delta_1 \ldots \delta_n$ von $a' - a$, welche alle Punkte der Menge $\mathfrak{M}_s$ enthalten, kann zufolge des Umstandes, dass diese Menge discret ist, kleiner als jede beliebige Zahl werden. Lassen wir nun die Summe σ zur Null convergiren, so hat das mittlere Glied in (18) zum

Grenzwerthe das obere Integral der im Intervalle (a, a') von x ebenfalls endlichen Function $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$, d. i.

$$\int_a^{(1)\,a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$[1]

Aus der Endlichkeit der Function (15) im Intervalle (a, a') von x ergiebt sich zufolge des Corollars 2) unmittelbar die Existenz des Doppelintegrals

$$J = \int\int_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Die Summe der Streifen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_{k_n}$ hat bei $\lim \sigma = +0$ den Grenzwerth $\mathfrak{F}$; es besteht daher nach Nr. 3 die Formel

$$\lim_{\sigma = 0} \sum_1^{k_n} {}_r S_{(\mathfrak{F}_r)} f(x, y)\, d\mathsf{A} = J. \tag{18*}$$

Nach allem diesen erlangen wir aus (18) durch den Grenzübergang $\lim \sigma = +0$ die Formel

$$J - 2\varepsilon\,(a' - a) \leq \int_a^{(1)\,a'} dx \int_y^{y_2} f(x, y)\, dy \leq J + 2\varepsilon\,(a' - a).$$

Hieraus folgt, da ε jede noch so kleine Zahl sein darf, die Gleichung

$$\int_a^{(1)\,a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = J.$$

Auf ganz ähnliche Weise gelangt man zur Formel

$$\int_{y_1}^{(2)\,a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = J.$$

Somit sind das obere und untere Integral der Function

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

über das Intervall (a, a') einander gleich, sie ist also darüber integrirbar, so dass an Stelle der beiden letzten Formeln die Gleichung (17) tritt.

---

1) Vgl. Nachtrag II. 4.

5. Satz.[1]) Wenn das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy \tag{19}$$

existirt und das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} f|(x, y)|\, dy \tag{20}$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt im Intervalle (a, a') von x, dann convergirt das Integral (nach x)

$$\int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \tag{21}$$

absolut und es besteht ebenfalls die Gleichung (17) auf S. 168.

Beweis. Wir setzen eine Zahl $\varepsilon > 0$ nach Belieben fest und benutzen die nämliche Theilung des Intervalles (a, a') und des Gebietes $\mathfrak{F}$ wie beim 4. Satze. Dann können wir auf die Function $f(x, y)$ im Streifen $\mathfrak{F}_r$ den 4. Satz anwenden. Das ist leicht einzusehen; insbesondere wird die Endlichkeit der Function

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx \tag{22}$$

im Intervalle $(b_r, b_r + \varepsilon_r)$ auf die nämliche Art bewiesen, wie es bei einer ähnlichen Gelegenheit auf S. 164 gemacht ist. Auch lässt $f(x, y)$ ein Doppelintegral über den Streifen $\mathfrak{F}_r$ zu, da er ein Theil des Gebietes $\mathfrak{F}$ ist. Demnach gilt die Formel

$$S_{(\mathfrak{F}_r)} f(x, y)\, dA = \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

Setzen wir hierin nach einander $r = 1, \dots k_n$ und addiren die so erhaltenen Gleichungen, so gelangen wir zur Formel

$$\sum_1^{k_n}{}^r S_{(\mathfrak{F}_r)} f(x, y)\, dA = \sum_1^{k_n}{}^r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy. \tag{23}$$

Das soeben Bemerkte gilt auch hinsichtlich des Integrals (20), so dass neben die letzte Formel die folgende

1) De la Vallée-Poussin a. a. O. Nr. 33.

$$\sum_1^{k_n} {}_r S_{(\mathfrak{F}_r)} |f(x, y)| \, dA = \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} dx \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy \quad (24)$$

tritt.

Lassen wir die Summe $\sigma = \delta_1 + \cdots + \delta_n$ gegen Null convergiren, so hat der Streifen $\mathfrak{F}_1 + \cdots + \mathfrak{F}_{k_n}$ die Fläche $\mathfrak{F}$ zum Grenzwerthe. Da zufolge der Voraussetzungen das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} |f(x, y)| \, dx \, dy = \mathsf{I}$$

ebenfalls existirt, so hat die linke Seite von (24) bei

$$\lim \sigma = +0$$

dasselbe zum Grenzwerthe. I ist somit auch der Grenzwerth der rechten Seite von (24), d. h. es existirt das Integral

$$\int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy.$$

Demnach convergirt das Integral (21) absolut.[1])

Vollziehen wir den nämlichen Grenzübergang

$$\lim \sigma = +0$$

an der Gleichung (23), so gelangen wir aus ähnlichen Gründen zur Formel

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy.$$

14. 6. Satz.[2]) „Es wechsle $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ sein Zeichen nicht und zwar sei es daselbst z. B. nirgends negativ.“

„Wenn dann das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy \; (= \Phi(x)) \quad (25)$$

nicht im Allgemeinen gleichmässig im Intervalle (a, a') von x convergirt, so lässt es darüber kein Integral nach x zu.“

1) Vgl. Nachtrag III.

2) Nach de la Vallée-Poussin a. a. O. Nr. 51.

Beweis. Wenn das Integral (25) im Intervalle (a, a') nicht im Allgemeinen gleichmässig convergirt, so muss zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so gehören, dass blos für die Punkte eines jeden Theiles der Strecke (a, a'), welcher keinen Punkt eines nicht-discreten Punktsystems $\mathfrak{M}_\varepsilon$ enthält,

$$\int_{y_1}^{y_1+\eta} f(x,y)\,dy < \varepsilon \quad \text{und} \quad \int_{y_2-\eta}^{y_2} f(x,y)\,dy < \varepsilon \tag{26}$$

ist, wenn nur $0 < \eta < \delta$ ist. Unter diese Aussage lässt sich auch die Möglichkeit unterbringen, dass es gar keinen Theil von (a, a') giebt, worin die Beziehungen (26) überall gelten; man braucht sich nur unter $\mathfrak{M}_\varepsilon$ eine Menge von der äussern Länge $a' - a$ zu denken.

Nehmen wir zuerst an, das Integral (25) sei im Intervalle (a, a') endlich. Wäre es dabei in Punkten des Intervalles (a, a'), welche ein nicht-discretes System bilden, nicht vorhanden, so lässt es natürlich kein Integral nach x über das Intervall (a, a') zu. Wir haben also noch vorauszusetzen, dass das Integral (25) in allen Punkten von $\mathfrak{M}_\varepsilon$ (abgesehen von einer discreten Menge) existire. Um die Nicht-Integrirbarkeit dieser Function $\Phi(x)$ von $x = a$ bis $x = a'$ nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dass die Punkte x im Intervalle (a, a'), worin die Unstetigkeit von $\Phi(x)$ [d. h. der Unterschied der Unbestimmtheitsgrenzen von $\Phi(x + \xi)$ bei $\lim \xi = 0$] nicht kleiner als eine gegebene Zahl ε ist, eine nicht-discrete Menge bilden.[1]) Es genügt also nachzuweisen, dass die Unstetigkeit von $\Phi(x)$ in einem beliebigen Punkte $x = c$ der Menge $\mathfrak{M}_\varepsilon$ nicht kleiner als ε ist. Wäre dem nicht so, so sei die Unstetigkeit von $\Phi(x)$ bei $x = c$ $\varepsilon - \lambda$ $(\lambda > 0)$. Setzen wir

$$\int_{y_1+\eta}^{y_2-\eta} f(x, y)\,dy = \Psi(x, \eta), \tag{27}$$

so haben wir zufolge der Existenz des Integrals (25)

$$\lim_{\eta=+0} \Psi(x, \eta) = \Phi(x)$$

und zwar insbesondere für $x = c$. Also giebt es so kleine Werthe von η, dass

1) Vgl. Nachtrag II. 2*.

$$0 < \Phi(c) - \Psi(c, \eta) < \lambda : 3 \tag{28}$$

ist. Da die Unstetigkeit von $\Phi(x)$ bei $x = c$ $\varepsilon - \lambda$ sein soll, so kann man eine solche positive Zahl δ angeben, dass für jeden Werth von x:

$$c - \delta < x < c + \delta \quad |\Phi(x) - \Phi(c)| < (\varepsilon - \lambda) + \lambda : 3 \tag{29}$$

ist.[1]) Wir können dann, da die Function $\Psi(x, \eta)$ bei constantem η eine stetige Function von x ist, die Zahl δ auch so klein annehmen, dass, wenn nur

$$c - \delta < x < c + \delta$$

ist,

$$|\Psi(c, \eta) - \Psi(x, \eta)| < \lambda : 3 \tag{30}$$

ist. Aus (28)—(30) folgt durch Addition, dass, wenn nur $c - \delta < x < c + \delta$ ist,

$$|\Phi(x) - \Psi(x, \eta)| < \varepsilon$$

ist. Somit wäre im ganzen Intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ von x

$$0 \leqq \int_{y_1}^{y_1 + \eta} f(x, y)\, dy + \int_{y_2 - \eta}^{y_2} f(x, y)\, dy < \varepsilon,$$

also auch jedes Integral für sich kleiner als ε. Dies ist aber gegen die Voraussetzung; denn es soll der Punkt $x = c$ der Menge $\mathfrak{M}_\varepsilon$ nicht in einem Intervalle von x vorkommen, wo jedes der Integrale (26) kleiner als ε ist.

Lassen wir zweitens die Function $\Phi(x)$ im Intervalle (a, a') nicht endlich sein. Soll davon ein uneigentliches Integral von $x = a$ bis $x = a'$ vorhanden sein, so muss es

1) Sind nämlich O und U die obere und untere Unbestimmtheitsgrenze von $\Phi(x)$ bei $\lim x = c$, so entspricht jedem $\sigma > 0$ ein $\delta > 0$ in der Weise, dass für jedes x im Intervalle $(c - \delta, c + \delta)$

$$U - \sigma < \Phi(x) < O + \sigma$$

ist. Da nun auch

$$U - \sigma < \Phi(c) < O + \sigma$$

ist und zwar für jeden Werth von σ, so ergiebt sich zunächst, dass $U \leqq \Phi(c) \leqq O$ ist. Und hiermit erkennen wir aus den ersten Ungleichungen, dass, wenn nur $c - \delta < x < c + \delta$ ist, alsdann

$$-(O - U) - \sigma < \Phi(x) - \Phi(c) < (O - U) + \sigma$$

ist, was mit der Beziehung (29) übereinstimmt, wenn $O - U = \varepsilon - \lambda$ und $\sigma = \lambda : 3$ gesetzt wird.

eine discrete Punktmenge $\mathfrak{N}$ in der Strecke (a, a') geben, derart, dass $\Phi(x)$ in allen Theilen derselben, zu welchen kein Punkt von $\mathfrak{N}$ gehört, endlich und integrirbar ist. Das würde aber unter der obigen Voraussetzung unmöglich sein. Denn es müsste mindestens in einem von jenen Theilen ein nicht-discretes Punktsystem $\mathfrak{M}_\varepsilon'$ übrig bleiben, so dass erst in jenen Strecken desselben, welche keinen Punkt von $\mathfrak{M}_\varepsilon'$ enthalten, die Ungleichungen (26) bei gehörig kleinem η gelten. Dann wäre aber nach dem oben Bemerkten $\Phi(x)$ auch über den in Rede stehenden Theil von (a, a') nicht integrirbar. Mithin lässt $\Phi(x)$ von $x = a$ bis $x = a'$ auch kein uneigentliches Integral zu.

Aus dem 5. und 6. Satze ergiebt sich endlich der folgende.

7. Satz.[1]) Im Falle, dass die Function $f(x, y)$ innerhalb des endlichen Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen nicht ändert, ist dazu, dass das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy$$

gleich ist dem zweimaligen Integrale

$$\int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy, \tag{31}$$

nothwendig und hinreichend, dass auch das letztere Integral einen Sinn hat.

Dieser Satz lässt sich unmittelbar auf den Fall verallgemeinern, dass das Gebiet $\mathfrak{F}$ in eine endliche Anzahl von Theilen zerlegt werden kann, in deren keinem die Function $f(x, y)$ einen Zeichenwechsel aufweist. Man braucht nur den 7. Satz auf jedes der genannten Theilgebiete anzuwenden und die so erhaltenen Gleichungen zu addiren.

14*. Schluss. Beispiele.

8. Satz. „Wenn die Function $f(x, y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen nicht wechselt, so folgt aus

1) De la Vallée-Poussin a. a. O. Nr. 54.

dem Vorhandensein des zweimaligen Integrals (31) das des Doppelintegrals

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy.“ \tag{32}$$

Beweis. Für den Fall, dass $f(x, y)$ in allen Theilen der Linien $K_1 L_1$ und $K_2 L_2$, welche keinen Punkt eines gegebenen Systems erster Gattung enthalten, endlich ist, wurde der Satz bereits auf S. 135 erwiesen. Um ihn allgemein zu erhalten, ziehe man durch die Punkte P, P' auf der x-Axe mit den Abscissen $a + \xi$, $a' - \xi$ $(\xi > 0)$ Parallele zur y-Axe und construire die Curven $Q_1 R_1$, $Q_2 R_2$ mit den Gleichungen

$$y = \varphi_1(x) + \xi \qquad y = \varphi_2(x) - \xi \qquad (a \leqq x \leqq a').$$

Diese vier Linien bilden ein gemischtliniges Viereck $M_1' N_1' N_2' M_2'$, das mit $\mathfrak{G}(\xi)$ oder kürzer mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werde. In allen Punkten derselben ist $f(x, y)$ stetig, wir haben daher nach XVII. 8

$$\iint_{(\mathfrak{G})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{y_1+\xi}^{y_2-\xi} f(x, y)\, dy = X(\xi). \tag{33}$$

Da das Gebiet $\mathfrak{G}(\xi)$ bei abnehmendem ξ beständig wächst, so wächst, wenn $f(x, y) \geqq 0$ vorausgesetzt wird, $X(\xi)$ ebenfalls beständig. $X(\xi)$ hat daher bei $\lim \xi = +0$ entweder einen positiven endlichen Grenzwerth oder den Grenzwerth $+\infty$. Das Letztere ist hier, wie leicht zu sehen, unmöglich. Vermöge der Existenz des Integrals (31) dürfen wir nämlich in (33)

$$\int_{y_1+\xi}^{y_2-\xi} f(x, y)\, dy = \left\{ \int_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_1+\xi} - \int_{y_2-\xi}^{y_2} \right\} f(x, y)\, dy$$

setzen, so dass wir die Formel

$$\left.\begin{aligned} X(\xi) = \int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{y_1}^{y_2} f dy - \int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{y_1}^{y_1+\xi} f dy \\ - \int_{a+\xi}^{a'-\xi} dx \int_{y_2-\xi}^{y_2} f dy \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

erhalten. Das erste Integral rechts hat bei $\lim \xi = +0$ den endlichen Grenzwerth (31), den wir kurz mit K be-

zeichnen. Das zweite und das dritte Integral sind jedenfalls positiv, somit bleibt $X(\xi)$ stets unter K, kann also bei $\lim \xi = +0$ nicht ins Unendliche wachsen. Es existirt also das Doppelintegral (32). (Daher sind nach dem 7. Satze die Integrale (31) und (32) einander gleich und es muss mithin sowohl das zweite, als auch das dritte Glied auf der rechten Seite von (34) bei $\lim \xi = +0$ zur Null convergiren.)

Gehen wir umgekehrt von der Annahme aus, dass das Doppelintegral (32) vorhanden sei, so gelangen wir im Falle, dass das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy, \tag{35}$$

höchstens ein unendliches Systems erster Gattung von Werthen x im Intervalle (a, a') abgerechnet, eigentlich ist, durch den Satz auf S. 135 und im Falle, dass es im Allgemeinen gleichmässig für alle x in diesem Intervalle convergirt, durch den 5. Satz auf S. 170 zur Existenz des zweimaligen Integrals (31). Wenn das Integral (35) für die genannten x nicht im Allgemeinen gleichmässig convergirt, so ist nach dem 6. Satze das Integral (31) nicht vorhanden; allein dass dann auch das Doppelintegral (32) ohne Sinn ist, hat sich bisher nicht beweisen lassen. Freilich ist uns kein Beispiel davon bekannt, dass unter den zuletzt erwähnten Umständen (immer bei durchgängiger Stetigkeit der das Zeichen nicht wechselnden Function $f(x, y)$ im Innern des Gebietes $\mathfrak{F}$) das Doppelintegral (32) existirt. Manchmal reicht indess der folgende Satz aus.

9. Satz. „Wenn das Integral (35) für jeden Werth von x innerhalb eines Intervalles (c, c'), wobei $a < c < c' < a'$ sein soll, positiv unendlich ist und zwar gleichmässig für alle diese x (d. h. wenn sich jeder positiven Zahl G eine andere δ so zuordnen lässt, dass falls nur $0 < \xi < \delta$ ist,

$$\int_{y_1+\xi}^{y_2-\xi} f(x, y)\, dy > G$$

ist für jedes x zwischen c und c'), dann hat das Doppelintegral (32) keinen Sinn, d. h. es ist

$$\lim_{\xi=+0} X(\xi) = +\infty.\text{“} \tag{36}$$

In der That haben wir jetzt, wenn wir uns nur ξ kleiner als $c - a$ und $a' - c'$ denken,

$$X(\xi) > G(c' - c),$$

woraus sich unmittelbar die Formel (36) ergiebt.

Wenn die ihr Zeichen nicht wechselnde Function $f(x, y)$ unendlich viele Unstetigkeiten innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ aufweisen darf, so kann, wie de la Vallée-Poussin bemerkt hat (Ann. de la soc. scientif. de Bruxelles XVI. B. S. 180), das Doppelintegral (32) vorhanden sein, während das zweimalige Integral (31) keinen Sinn hat. Ein solches Beispiel haben wir bereits kennen gelernt (S. 140).

Beispiele. 1) Das Dirichlet'sche Integral

$$J = \iint_{(OEF)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \, dx \, dy \qquad (\alpha > 0, \ \beta > 0)$$

(vgl. S. 140). Die Function $x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$ ist in jedem Punkte des Dreiecks OEF (Fig. 18 S. 139) ausser in denen der Seiten OE und OF positiv und sicher stetig. Das zweimalige Integral

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} \, dx \int_0^{1-x} y^{\beta-1} dy = \frac{1}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta} \, dx$$

hat Bedeutung. Somit dürfen wir

$$J = \frac{1}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta} \, dx \tag{a}$$

setzen. Dadurch, dass man zuerst nach x und dann nach y integrirt, findet man auf ähnliche Art die Formel

$$J = \int_0^1 y^{\beta-1} \, dy \int_0^{1-y} x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y^{\beta-1} (1-y)^{\alpha} \, dy. \tag{b}$$

Führen wir im letzten Integrale anstatt y die Veränderliche x durch die Gleichung $y = 1 - x$ ein, so geht die Formel (b) über in

$$J = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} \, dx.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit α und addiren zu ihr die mit β multiplicirte Gleichung (a), so finden wir,

$$(\alpha + \beta) J = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} [(1-x) + x] \, dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Somit besteht die Gleichung

$$\iint_{(OEF)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \, dx \, dy = \frac{1}{\alpha + \beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx. \tag{c}$$

Setzen wir in (c) für das Integral rechts d. i. $B(\alpha, \beta)$ den in XVI. 8 erwähnten Ausdruck durch die Gammafunctionen, so erhalten wir die von Dirichlet (Werke I. S. 398) auf einem weniger einfachen Wege abgeleitete Formel

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\iint_{(OEF)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1}\, dx\, dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)} \\ (\alpha > 0 \quad \beta > 0).\end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

Die Umformung des Nenners geschieht nach der Formel (f*) auf S. 398 d. I. T. Diese Ableitung der Formel (d) rührt von Liouville her (J. d. Math. 1. sér. T. 4 S. 231).

2) Ein weiteres Beispiel bietet Formel (21) in XIX. 15.

3) Für die Function

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

sind nach S. 6 die beiden Integrale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

vorhanden, aber von verschiedenem Werthe. Daraus folgt nothwendig, dass diese Function kein Doppelintegral über das Quadrat $OACB$ in Fig. 19 auf S. 146 zulässt, was dort unmittelbar nachgewiesen ist. Denn hätte sie eines, so müssten die soeben erwähnten Integrale einander gleich sein.

Doppelintegrale über ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet.

15. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ blos nach der Richtung der Abscissen- oder blos nach der Richtung der Ordinatenaxe oder endlich nach diesen beiden Richtungen sich ins Unendliche erstreckt. Wir nehmen ein für alle Male an, dass die Function $f(x, y)$ mindestens bei jedem Punkte innerhalb $\mathfrak{F}$ stetig in Bezug auf beide Veränderliche x, y ist und dass sie über jeden ganz im Endlichen liegenden Theil von $\mathfrak{F}$ ein eigentliches oder uneigentliches Doppelintegral zulässt.

I. Fall. Das Gebiet $\mathfrak{F}$ ist das durch die Figur 20 auf S. 152 dargestellte.

1. Satz.[1]) „Wenn das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\,dx\,dy \;(= J)$$

existirt und das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\,dy \tag{1}$$

in jedem Intervalle (a, X) von x, wo $X > a$ ist, im Allgemeinen gleichmässig convergirt, dann convergirt das Integral

$$\int_a^\infty dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy \tag{2}$$

absolut und es besteht die Gleichung

$$J = \int_a^\infty dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy.\text{“} \tag{3}$$

Beweis. Bezeichnet $X = OP$ eine Zahl grösser als a und $\mathfrak{F}(X)$ den dieser Abscisse entsprechenden Theil $K_1 M_1 M_2 K_2$ des Gebietes $\mathfrak{F}$, so hat man nach Nr. 8

$$J = \lim_{X=+\infty} \iint_{\mathfrak{F}(X)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Nun ist aber zufolge des 5. Satzes auf S. 170

$$\iint_{\mathfrak{F}(X)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^X dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Damit leitet man aus (4) durch den Grenzübergang

$$\lim X = +\infty$$

die Existenz des Integrals (2) und die Gleichung (3) ab.

Ebenso wie der 5. Satz a. a. O. lässt sich auch der 6. Satz auf S. 171 verallgemeinern. „Wechselt $f(x, y)$ sein Zeichen im Gebiete $\mathfrak{F}$ nicht und convergirt das Integral (1) mindestens in einem Intervalle (a, X) nicht im Allgemeinen gleichmässig, so hat das Integral (2) keinen Sinn.“ Und

---

1) In ähnlicher Art lässt sich der Satz auf S. 162 ausdehnen.

daraus ergiebt sich dann wieder der dem 7. Satze entsprechende:

Im Falle, dass $f(x, y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein Zeichen nicht wechselt, ist dazu, dass das Doppelintegral J gleich ist dem zweimaligen Integrale (2), nothwendig und hinreichend, dass auch das letztere einen Sinn hat.

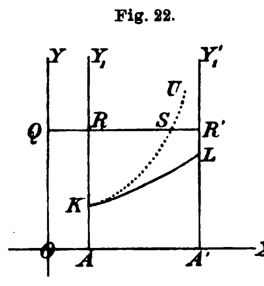
Um endlich die Sätze 8) und 9) zu beweisen, ziehe man die Parallelen zur Y-Axe mit den Abscissen $x = a + \xi$ und $x = 1 : \xi$ $(\xi > 0)$ und die Curven $R_1 V_1$, $R_2 V_2$ mit den Gleichungen

$$y = \varphi_1(x) + \xi \quad y = \varphi_2(x) - \xi \quad (x \geqq a).$$

Auf das eigentliche Doppelintegral von $f(x, y)$ über das von diesen vier Linien gebildete Gebiet $\mathfrak{G}$ lassen sich dann beim Grenzübergang $\lim \xi = +0$ dieselben Schlüsse anwenden, wie in der vorigen Nummer.

II. Fall.[1]) Das Integrationsgebiet $\mathfrak{J}$ sei entweder der von den Parallelen KY_1 und LY_1' zur positiven Ordinatenaxe mit den Abscissen $OA = a$, $OA' = a'$ und der Curve KL begrenzte unendliche Parallelstreifen oder der ins Unendliche ausgedehnte Raum zwischen der Geraden KY_1 und der Curve KU, welche der Geraden $A'Y_1' \parallel OY$ asymptotisch sich nähert. Die Curve KL bezw. KU, die von jeder Parallelen zur y-Axe höchstens in einem Punkte geschnitten wird und wovon jedes endliche Stück mit einer Parallelen zur x-Axe höchstens eine bestimmte Anzahl von Schnittpunkten gemein hat, habe die Gleichung $y = \varphi(x)$.

Fig. 22.



1) Auch im II. Falle giebt es einen dem Satze auf S. 162 entsprechenden. Man braucht nur in (2a) $y_1 = \varphi(x)$ zu nehmen und in (2b) $y_2 - \eta$ durch Y, y_2 durch ∞ zu ersetzen, wobei es dann heisst: „für jedes $Y > H$ besteht die Beziehung (2b)“.

Die i. T. gegebenen Sätze im Wesentlichen nach de la Vallée-Poussin a. a. O. Nr. 40, 42.

Das Integral

$$\int_{\varphi(x)}^{\infty} |f(x, y)|\, dy \tag{5}$$

heisst im Allgemeinen gleichmässig convergent im Intervalle (a, a') von x, wenn jedem $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $\delta > 0$, $\mathsf{H} > 0$ so zugeordnet werden können, dass, wenn nur $0 < \eta < \delta$ ist,

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\eta} |f(x, y)|\, dy < \varepsilon$$

und wenn nur $Y > \mathsf{H}$,

$$\int_{Y}^{\infty} |f(x, y)|\, dy < \varepsilon \tag{6}$$

ist.

Der Hilfssatz 1. in Nr. 12 und sein Beweis bleiben im Wesentlichen unverändert. Nur treten an Stelle von δ, wie gerade vorhin, zwei Zahlen δ, H, an Stelle des zweiten Integrals in (5) a. a. O. das Integral (6) und an Stelle des Integrals (6) das obige (5).

Auch der 4. Satz in Nr. 13 und sein Beweis lassen sich ohne Weiteres auf den in Rede stehenden Fall übertragen. In seiner Aussage treten einfach an Stelle von y_1 und y_2 bezw. $\varphi(x)$ und $+\infty$. — Um die Formel (18*) auf ihn auszudehnen, zieht man zunächst eine Gerade $y = Y (= OQ)$, wodurch von den Gebieten $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_r$ bezw. die endlichen Stücke $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_r$ abgeschnitten werden mögen. ($\mathfrak{G}$ ist also die Fläche $KLR'R$ bezw. KSR.) Im ersten Falle denke man sich $Y > \varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq a')$. — Dann besteht gerade zufolge (18*) die Formel

$$\lim_{\sigma=0} \sum_{1}^{k_n} S_{\mathfrak{G}_r} f\, d\mathsf{A} = S_{\mathfrak{G}} f\, d\mathsf{A},$$

d. h. jedem $\varkappa > 0$ entspricht ein $\lambda > 0$ so, dass, wenn nur $\sigma < \lambda$ ist,

$$\Big| \sum S_{\mathfrak{G}_r} f\, d\mathsf{A} - S_{\mathfrak{G}} f\, d\mathsf{A} \Big| < \varkappa$$

ist. Lässt man die $\delta_1 \ldots \delta_n$ ein bestimmtes System von Strecken sein, dessen Summe kleiner als λ ist, und bedenkt, dass

$$\lim_{Y=+\infty} S_{\mathfrak{G}_r} f dA = S_{\mathfrak{F}_r} f dA, \quad \lim_{Y=+\infty} S_{\mathfrak{G}} f dA = S_{\mathfrak{F}} f dA$$

ist, so wird man leicht finden, dass dann

$$|\sum S_{\mathfrak{F}_r} f dA - S_{\mathfrak{F}} f dA| < 3\varkappa$$

ist, womit die Formel (18*) a. a. O. auch für den vorliegenden Fall erwiesen ist. — Nachdem dies gemacht ist, bleibt der Beweis des 5. Satzes in Nr. 13, in welchem wir blos y_1 durch $\varphi(x)$ und y_2 durch $+\infty$ zu ersetzen haben, aufrecht. Bei derselben Aenderung gilt auch der 6. Satz in Nr. 14, dessen Beweis von ihr nicht berührt wird.

Wir dürfen somit auch jetzt behaupten, dass, wenn die Function $f(x, y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{F}$ ihr Zeichen nicht wechselt, zum Bestehen der Formel

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a'} dx \int_{\varphi(x)}^{\infty} f(x, y)\, dy \tag{7}$$

die Existenz der beiden darin vorkommenden Integrale nothwendig und hinreichend ist.

Die Sätze 8) und 9) ergeben sich auf die nämliche Weise wie in Nr. 14*. Man hat nur unter $\mathfrak{G}$ das von den zwei Parallelen zur y-Axe mit den Abscissen $x = a + \xi$ und $x = a' - \xi$, der Curve ST (bezw. SV) mit der Gleichung $y = \varphi(x) + \xi$ und der Parallelen zur x-Axe mit der Ordinate $y = 1 : \xi$ gebildete Viereck zu verstehen.

Beispiel. Setzt man

$$\frac{\lambda^2 (xy)^{\lambda-1}(1 - x^{2\lambda} y^{2\lambda})}{(1 + x^{2\lambda} y^{2\lambda})^2} = f(x, y) \quad (\lambda > 1),$$

so sind nach S. 8 die beiden Integrale

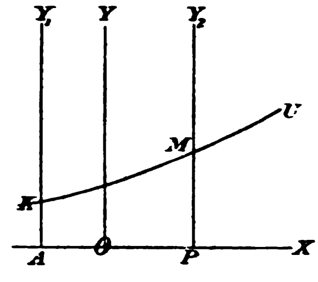
$$\int_0^b dy \int_0^\infty f(x, y)\, dx, \quad \int_0^\infty dx \int_0^b f(x, y)\, dy$$

vorhanden, jedoch von verschiedenem Werthe. Daraus folgt, dass die in Rede stehende Function $f(x, y)$ kein Doppelintegral zulässt über das Gebiet, welches die y-Axe vom unendlichen Parallelstreifen zwischen der x-Axe und der Geraden $y = b$ abschneidet. Wäre nämlich ein solches vorhanden, so müsste jedes von den beiden Integralen ihm gleich, folglich beide einander gleich sein. — Diese Function $f(x, y)$ ist, falls $xy > 0$ ist, ausserhalb der Hyperbel $xy = 1$ positiv, innerhalb derselben negativ. Es ist leicht zu zeigen, dass dieselbe über

keinen der beiden Theile, in welche das obige Gebiet durch einen Ast dieser Hyperbel zerlegt wird, ein uneigentliches Doppelintegral zulässt.

16. III. Fall.[1]) Das Integrationsgebiet sei der zwischen der zur positiven y-Axe parallelen Geraden KY_1 mit der Abscisse $OA = a$ und der Curve KU, an welcher mindestens die Abscisse ins Unendliche wächst, liegende Theil $\mathfrak{F}$ der Ebene (Fig. 23). Diese sonst wie im II. Falle beschaffene Curve habe die Gleichung $y = \varphi(x)$ $(x \geqq a)$.

Fig. 23.



1. Satz. „Wenn das Integral

$$\int_{\varphi(x)}^{+\infty} |f(x, y)|\, dy$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt in jedem Intervalle (a, X) von x, wo $X > a$ ist, und das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f\, dx\, dy$$

existirt, so existirt auch das zweimalige Integral

$$\int_a^{\infty} dx \int_{\varphi(x)}^{\infty} f(x, y)\, dy \tag{8}$$

und man hat

$$(J =) \iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{\infty} dx \int_{\varphi(x)}^{\infty} f(x, y)\, dy.\text{“} \tag{9}$$

Beweis. Bedeutet $\mathfrak{F}(X)$ den durch die Gerade

$$x = X = OP$$

von $\mathfrak{F}$ abgeschnittenen Parallelstreifen KMY_2Y_1, so haben wir nach dem in Nr. 15 erweiterten 5. Satze der Nr. 13

$$\iint_{\mathfrak{F}(X)} f\, dx\, dy = \int_a^{X} dx \int_{\varphi(x)}^{\infty} f\, dy. \tag{10}$$

---

1) Der im Falle III dem Satze auf S. 162 entsprechende verlangt, dass die für den Fall II aufgestellten Bedingungen in jedem Intervalle (a, X) bestehen und dass $\int_a^{\infty} X_2(x)\, dx$ vorhanden ist.

Der erste Satz i. T. nach de la Vallée-Poussin a. a. O. Nr. 45, der zweite ebenfalls, a. a. O. Nr. 54, jedoch mit anderem Beweise.

Daraus ergiebt sich bei $\lim X = +\infty$ die Formel (9), weil die linke Seite den Grenzwerth J besitzt.

2. Satz. Im Falle, dass $f(x, y)$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein Zeichen nicht wechselt, ist zum Bestehen der Gleichung (9) nothwendig und hinreichend, dass beide Seiten derselben einen Sinn haben.

Um zu zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, braucht man nur zu bemerken, dass, wenn das Doppelintegral J existirt, auch $\iint_{\mathfrak{J}(X)} f\,dx\,dy$ und wenn das zweimalige Integral (8) existirt, auch

$$\int_a^X dx \int_{\varphi(x)}^{\infty} f\,dy$$

einen Sinn haben muss. Dann aber gilt die Gleichung (10), aus welcher, wie bemerkt, durch den Grenzübergang

$$\lim X = +\infty$$

die Formel (9) folgt.

Um den 8. und 9. Satz in Nr. 14* auf den in Rede stehenden Fall zu übertragen, lässt man $\mathfrak{G}$ das Viereck sein, das von den zwei Parallelen zur y-Axe mit den Abscissen $x = a + \xi$ und $x = 1 : \xi$, der Curve SV mit der Gleichung $y = \varphi(x) + \xi$ und der Parallelen zur x-Axe mit der Ordinate $y = 1 : \xi$ gebildet wird.

Beispiele. 1) „Die auf S. 35 erwähnte Function

$$F(x, y) = x^{\alpha+\beta-1} y^{\alpha-1} e^{-x-xy}$$

hat ein Doppelintegral über den ins Unendliche ausgedehnten ersten Quadranten XOY und zwar ist

$$\iint_{(YOX)} F(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} dy \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x-xy}\,dx.\text{“} \quad \text{(a)}$$

Um zu zeigen, dass das soeben erwähnte Doppelintegral existirt, ziehen wir vom Punkte K mit den Coordinaten $x = OE = 1$, $y = EK = 1$ (Fig. 18 auf S. 139) die Strecke $KF \| OX$ und die Gerade $EKY_1 \| OY$. Hierdurch zerfällt der Winkel XOY in drei Theile, das Quadrat $OEKF$, den

unendlichen rechten Winkel XEY_1 und den unendlichen Parallelstreifen $YFKY_1$. Ueber jeden derselben lässt $F(x, y)$ ein Doppelintegral zu. Was den ersten und zweiten Theil von XOY betrifft, so brauchen wir, um das einzusehen, blos zu bemerken, dass

$$F(x, y) = (x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} y^{\alpha-1} e^{-y})\, e^{-(x-1)y}$$

ist und der erste eingeklammerte Factor nach den Sätzen 4) auf S. 138 und 155 ein Doppelintegral zulässt, während der zweite $e^{-(x-1)y}$ eine endliche Zahl nicht überschreitet (Satz 11) auf S. 159). Ziehen wir dann innerhalb des Streifens $YFKY_1$ die Sehne QN im Abstande $OQ = Y$ von der x-Axe parallel zu ihr, so haben wir nach dem 2. Satze auf S. 89

$$\iint_{(QFKN)} F(x, y)\, dx\, dy = \int_1^Y y^{\alpha-1} dy \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1} e^{-x-xy} dx. \quad \text{(b)}$$

Dieses Doppelintegral hat nun bei $\lim Y = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth, weil, wie wir bereits auf S. 34 erfahren haben, das Integral auf der rechten Seite von (a), welches hinter dem ersten $\int$ eine für jeden Werth von y grössere Function von y enthält als das Integral auf der rechten Seite von (b), einen Sinn hat. Es kommt somit der Satz 6, auf S. 395 d. I. T. zur Anwendung. Demnach lässt $F(x, y)$ auch ein Doppelintegral über den Streifen $YFKY_1$ zu.

Da die Function $F(x, y)$ innerhalb des Winkels XOY überall positiv ist und das zweimalige Integral auf der rechten Seite von (a), wie erwähnt, einen Sinn hat, so tritt der zweite von den vorstehenden Sätzen in Wirksamkeit. Sonach besteht in der That die Gleichung (a).

Auf ähnliche Art ergiebt sich die Formel

$$\iint_{(YOX)} F(x, y)\, dx\, dy = \int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-xy} dy. \quad \text{(c)}$$

Wir haben nur im genannten Satze x und y zu vertauschen und zu bemerken, dass auch das zweimalige Integral auf der rechten Seite von (c) vorhanden ist, nämlich nach S. 35 den Werth $\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)$ hat.

Aus den Formeln (a) und (c) folgt die Gleichung

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1}dy\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x-xy}dx = \int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-xy}dy,$$

welche wir bereits a. a. O. verwertheten.

2) Die auf S. 73 angegebene unstetige Function $f(x, y)$ liefert ein Beispiel davon, dass das Doppelintegral einer nirgends negativen Function über ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet, nämlich den unbegrenzten, von den positiven Coordinatenaxen gebildeten rechten Winkel XOY, vorhanden sein kann, während eines von den zugehörigen zweimaligen Integralen dieser Function keinen Sinn hat. Es ist $\iint_{(YOX)} f\,dx\,dy = 0$; das Integral $\int_0^\infty dx\int_0^\infty f\,dy$ hat dagegen keinen Sinn, weil schon das Integral $\int_0^x dx\int_0^\infty f\,dy$ keine Bedeutung hat (vgl. S. 88). $\int_0^\infty dy\int_0^\infty f\,dx$ ist gleich Null.

3) Man versuche den Satz 5) auf S. 156 mit Hilfe des 9. Satzes auf S. 180, worin x und y zu vertauschen sind, zu beweisen.

17. Der Green'sche Satz für die uneigentlichen Doppelintegrale.

Der Satz in XVII. 10 gilt auch unter den folgenden Bedingungen. 1) Die Ränder des ganz im Endlichen liegenden Integrationsgebietes $\mathfrak{F}$ seien reguläre Linien, d. h. sind z. B.

$$x = \varphi(\tau) \quad y = \psi(\tau) \quad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \tag{1}$$

die Gleichungen des äusseren Randes $\mathfrak{r}$, so sollen entweder die Functionen $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ für jedes τ im Intervalle (α, β) endliche und stetige Differentialquotienten nach τ besitzen oder es soll $\mathfrak{r}$ in eine endliche Anzahl von Theilen zerfallen, in deren jedem $\varphi(\tau)$ $\psi(\tau)$ die soeben angegebene Beschaffenheit besitzen. 2) Die Function $f(x, y)$ genüge allen in jenem Satze aufgestellten Forderungen innerhalb eines jeden Gebietes, das innerhalb des gegebenen $\mathfrak{F}$ liegt und dabei dessen Begrenzung nicht berührt, und die Function $F(x, y)$ bezw. $G(x, y)$ verhalte sich in $\mathfrak{F}$ genau so wie dort. 3) $f(x, y)$ lässt ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zu.

Beim Beweise dieser Erweiterung des Green'schen Satzes können wir uns auf die Formel (c) a. a. O. und auf das in Fig. 12 auf S. 97 dargestellte Gebiet $\mathfrak{F}$ beschränken. Wir

setzen das Intervall (α, β) zunächst als endlich voraus und nehmen in der Figur ein System von regulären Curven $\mathfrak{r}_\sigma$ mit den Gleichungen

$$x = x_{\tau\sigma} = \varphi(\tau, \sigma) \qquad y = y_{\tau\sigma} = \psi(\tau, \sigma) \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \quad (2)$$

an, welche bei $\lim \sigma = +0$ in den äusseren Rand $\mathfrak{r}$ mit den Gleichungen (1) übergehen und ein System von regulären Curven $\mathfrak{r}_{1\sigma}$ mit den Gleichungen

$$x = x_{1,\tau\sigma} = \varphi_1(\tau, \sigma) \quad y = y_{1,\tau\sigma} = \psi_1(\tau, \sigma) \quad (\alpha_1 \leqq \tau \leqq \beta_1), \quad (3)$$

welche bei $\lim \sigma = +0$ in den inneren Rand $\mathfrak{r}_1$ mit den Gleichungen

$$x = x_{1\tau} = \varphi_1(\tau) \qquad y = y_{1\tau} = \psi_1(\tau) \qquad (\alpha_1 \leqq \tau \leqq \beta_1) \quad (4)$$

übergehen. Auch das Intervall (α_1, β_1) sei endlich. Denken wir uns σ so klein, dass die Curven (2) und (3) einander nicht treffen, so schliessen sie ein Gebiet ein, das $\mathfrak{F}(\sigma)$ heisse. Dafür gilt der Green'sche Satz a. a. O., d. h. es besteht nach (c) die Formel

$$\left.\begin{aligned}(J(\sigma) =)\ S_{\mathfrak{F}(\sigma)} f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta F(x_{\tau\sigma}, y_{\tau\sigma}) \frac{dy_{\tau\sigma}}{d\tau} d\tau \\ - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x_{1,\tau\sigma}, y_{1,\tau\sigma}) \frac{dy_{1\tau\sigma}}{d\tau} d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Hier lassen wir σ zum Grenzwerthe 0 übergehen. Dann ist

$$\lim_{\sigma=+0} J(\sigma) = S_{\mathfrak{F}} f(x, y)\, dA\ (= J). \quad (6)$$

Wir können uns $x_{\tau\sigma}, y_{\tau\sigma}$ so gewählt denken, dass

$$F(x_{\tau\sigma}, y_{\tau\sigma})$$

stetig in Bezug auf die Veränderlichen τ und σ ist für jedes Werthsystem $\tau\sigma$, welches die Beziehungen erfüllt:

$$\alpha \leqq \tau \leqq \beta \qquad 0 \leqq \sigma \leqq \gamma,$$

unter γ eine bestimmte positive Zahl verstanden. Im Falle, dass $\frac{dy_\tau}{d\tau}$ im ganzen Intervalle (α, β) von τ stetig ist, werden wir sicher $y_{\tau\sigma}$ überdies so annehmen können, dass das Nämliche hinsichtlich der Function $\frac{dy_{\tau\sigma}}{d\tau}$ gilt. Somit ist auch das Product

$$F(x_{\tau\sigma}, y_{\tau\sigma})\frac{dy_{\tau\sigma}}{d\tau}$$

stetig in Bezug auf τ und σ für jedes der soeben erwähnten Werthsysteme. Daraus ergiebt sich nach einem Satze auf S. 442 d. I. T., dass

$$\lim_{\sigma=+0}\int_{\alpha}^{\beta} F(x_{\tau\sigma}, y_{\tau\sigma})\frac{dy_{\tau\sigma}}{d\tau}d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} F(x_{\tau}, y_{\tau})\frac{dy_{\tau}}{d\tau}d\tau \qquad (7)$$

ist. Zerfällt das Intervall (α, β) in eine endliche Anzahl von Theilen, in deren jedem $\frac{dy_\tau}{d\tau}$ durchaus stetig ist, so zerlegen wir das erste Integral auf der rechten Seite von (5) ihnen entsprechend in Theile. Auf jedes dieser Theilintegrale kann man den gerade gemachten Schluss anwenden und wird dann durch Addition der auf diese Weise erlangten Formeln wieder zur Gleichung (7) gelangen. — Auf die nämliche Weise erhält man die Formel

$$\lim_{\sigma=+0}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x_{1,\tau\sigma}, y_{1,\tau\sigma})\frac{dy_{1,\tau\sigma}}{d\tau}d\tau = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x_{1\tau}, y_{1\tau})\frac{dy_{1\tau}}{d\tau}d\tau. \qquad (8)$$

Mittelst der Formeln (6)—(8) ergiebt sich dann aus (5) bei $\lim \sigma = +0$ die Gleichung

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} F(x_{\tau}, y_{\tau})\frac{dy_{\tau}}{d\tau}d\tau - \int_{\alpha}^{\beta_1} F(x_{1\tau}, y_{1\tau})\frac{dy_{1\tau}}{d\tau}d\tau, \qquad (9)$$

w. z. b. w.

Sollten von den Intervallen (α, β) und (α_1, β_1) eines oder gar beide unendlich sein, so ersetze man in den Gleichungen der betreffenden Curve zunächst τ durch eine neue Veränderliche τ', zu welcher ein endliches Intervall gehört. Bei dieser Darstellung des betreffenden Randes besteht die der Gleichung (9) entsprechende. Kehrt man dann in dem einen oder in den beiden Integralen auf der rechten Seite derselben von τ' zur ursprünglichen Veränderlichen τ zurück, so erscheint wiederum die ursprüngliche Gleichung (9).

Aus dem im Vorstehenden erweiterten Green'schen Satze folgt auch eine neue Ausdehnung des Cauchyschen Integralsatzes auf S. 102. Unter der Voraussetzung, dass die Ränder des Gebietes $\mathfrak{F}$ reguläre Linien sind, können wir den a. a. O. gegebenen Satz auch dann gebrauchen, wenn

die Functionen $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$ zwar in jedem innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegenen Gebiete, welches dessen Begrenzung nicht berührt, endlich sind, nicht aber in diesem Gebiete $\mathfrak{F}$ selbst. (Es dürfen also diese Functionen z. B. längs der ganzen Begrenzung von $\mathfrak{F}$ unendlich werden.) Denn wenn dieser Umstand eintreten sollte, so verschwinden doch die Doppelintegrale (s) und (t) a. a. O., nunmehr freilich nach Nr. 3* als uneigentliche, weil die bezüglichen Integrale über jedes innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Gebiet, dessen Begrenzung mit der von $\mathfrak{F}$ keinen Punkt gemein hat, Null sind.

Mittelst der soeben gemachten Bemerkung lässt sich der in Rede stehende Satz auch übertragen auf den Fall, dass sich im Innern von $\mathfrak{F}$ eine reguläre Linie $\mathfrak{l}$ befindet, in deren Umgebung die genannten Functionen nicht endlich sind. Ist $\mathfrak{l}$ z. B. einfach und nicht geschlossen, so verlängere man sie in passender Weise nach beiden Seiten bis an die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ und setze für jeden der so erhaltenen Theile von $\mathfrak{F}$ den Cauchy'schen Satz an. Alsdann wird das Integral von $f(x)$ längs ihrer Trennungslinie aus der Summe der beiden Gleichungen verschwinden, da es einmal mit dem Zeichen $+$, einmal mit dem Zeichen $-$ in dieselbe eintritt. U. s. w.

18. Einführung neuer Integrationsveränderlichen in ein uneigentliches Doppelintegral.

Satz.[1]) „$\mathfrak{F}$ sei eine Fläche in der xy-, Φ eine in der uv-Ebene, die in folgender Beziehung zu einander stehen. Es giebt zwei für jeden Punkt von Φ (wozu im Falle, dass diese Fläche sich ins Unendliche erstreckt, der uneigentliche Punkt der uv-Ebene, für den $1:\sqrt{u^2+v^2}=0$ ist [vgl. auch II. S. 6], zu rechnen ist) eindeutige und bei jedem innerhalb Φ gelegenen Punkte stetige Functionen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ derart, dass, wenn

$$\varphi(u, v) = x \qquad \psi(u, v) = y \tag{1}$$

gesetzt werden und der Punkt u, v der uv-Ebene das Gebiet Φ einmal beschreibt, alsdann der Punkt x, y der xy-Ebene das Gebiet $\mathfrak{F}$ einmal beschreibt. Dabei müssen, falls $\mathfrak{F}$ ins Unendliche sich erstreckt, die Gleichungen (1) mindestens bei einem System von bestimmten Werthen uv den uneigentlichen Punkt der xy-Ebene, wofür

1) Vgl. auch C. Jordan, Cours d'Analyse 2. éd. II. Nr. 81flg.

$$1:\sqrt{x^2+y^2}=0$$

ist, liefern. Jeder endlichen, innerhalb Φ gelegenen, von gewöhnlichen Rändern begrenzten Fläche Φ', welche die Begrenzung von Φ nicht berührt, soll durch die Gleichungen (1) eine ebenfalls endliche, innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Fläche $\mathfrak{F}'$ von der nämlichen Beschaffenheit zugeordnet sein. Umgekehrt möge auch jedem Punkte von $\mathfrak{F}'$ nur ein Punkt von Φ' entsprechen und ferner sollen $\mathfrak{F}'$, Φ' alle jene Bedingungen erfüllen, welche den Flächen $\mathfrak{F}$ und Φ im Satze auf S. 106 auferlegt sind, d. i. die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ seien in jedem Punkte von Φ' stetig in Bezug auf u und v und die Jacobi'sche Determinante $J(u, v)$ ändere in Φ' ihr Zeichen nicht. Lässt dann die eindeutige Function $f(x, y)$ über jedes Gebiet $\mathfrak{F}'$ ein eigentliches und über $\mathfrak{F}$ ein uneigentliches Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\,dx\,dy \tag{2}$$

zu, so existirt auch das Doppelintegral

$$\iint_{(\Phi)} f(\varphi(u, v),\ \psi(u, v))\,J(u, v)\,du\,dv \tag{3}$$

und ist, mit $\iota = \pm 1$ wie a. a. O. multiplicirt, dem ersteren gleich. Und umgekehrt: Existirt das Integral (3), so ist auch das Integral (2) vorhanden und, mit ι multiplicirt, ihm gleich.“

Der Satz folgt unmittelbar aus dem auf S. 106. Denkt man sich nämlich in der xy-Ebene ein veränderliches Gebiet $\mathfrak{F}(\sigma)$, welches nirgends an die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ heranreicht und bei $\lim \sigma = +0$ in das Gebiet $\mathfrak{F}$ übergeht, so entspricht ihm zufolge der Voraussetzung in der uv-Ebene ein veränderliches Gebiet $\Phi(\sigma)$, das auch innerhalb Φ liegt, ohne die Begrenzung von Φ zu berühren, und bei $\lim \sigma = +0$ in die Fläche Φ übergeht. Nach dem genannten Satze haben wir, wenn wir der Kürze halber

$$f(\varphi(u, v),\ \psi(u, v)) = F(u, v)$$

setzen,

$$\int\int_{(\mathfrak{F}(\sigma))} f(x, y)\, dx\, dy = \iota \int\int_{(\Phi(\sigma))} F(u, v)\, J(u, v)\, du\, dv, \quad (4)$$

wobei ι so zu wählen ist, dass $\iota J(u, v)\, du\, dv$ das Zeichen von $\mathfrak{F}(\sigma)$ d. i. das von $\mathfrak{F}$ bekommt.

Lassen wir zuerst das Doppelintegral (2) vorhanden sein und bezeichnen seinen Werth mit J, so ergiebt sich aus (4) bei $\lim \sigma = +0$ nach Nr. 3

$$J = \iota \lim_{\sigma = +0} \int\int_{(\Phi(\sigma))} F(u, v)\, J(u, v)\, du\, dv. \quad (5)$$

Wechselt $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ sein Zeichen nicht, so auch $F(u, v)\, J(u, v)$ im Gebiete Φ nicht. Somit ergiebt sich aus der Formel (5) zufolge des Satzes auf S. 132, dass die Function $F(u, v)\, J(u, v)$ ein Doppelintegral über das Gebiet Φ besitzt. Wir dürfen daher anstatt (5) schreiben

$$J = \iota \int\int_{(\Phi)} F(u, v)\, J(u, v)\, du\, dv. \quad (6)$$

Wechselt aber $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ sein Zeichen, so muss $|f(x, y)|$ ein Doppelintegral über dasselbe zulassen. Und wir haben nach der Formel (6)

$$\int\int_{(\mathfrak{F})} |f(x, y)|\, dx\, dy = \iota \int\int_{(\Phi)} |F(u, v)|\, J(u, v)\, du\, dv.$$

Da $J(u, v)$ im Gebiete Φ sein Zeichen nicht ändert, so existirt mithin auch in diesem Falle das Doppelintegral (3) und es ergiebt sich demnach aus der Formel (5) wieder (6).

Aehnlich schliesst man von der Existenz des Doppelintegrals (3) auf die von (2) und auf die Gleichung (6).

Als Beispiel einer Substitution, durch welche ein unendliches Gebiet $\mathfrak{F}$ der xy-Ebene in ein endliches Φ der uv-Ebene übergeführt wird, kann die Abbildung der xy-Ebene mittelst reciproker Radienvectoren auf S. 114 oder auch die ihr verwandte Substitution (14) ebenda dienen. Wählt man den Punkt (a, b) der xy-Ebene ausserhalb der Fläche $\mathfrak{F}$, so liefern die Formeln (12*) a. a. O. für u, v nur endliche Werthe. Insbesondere entspricht dem Punkte $1 : \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ der Punkt $u = 0$, $v = 0$. Setzt man nämlich daselbst $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ und hierauf $1 : r = s$, so ergeben sich die Formeln

$$u = \frac{s(\cos\theta - as)}{1 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)s + (a^2 + b^2)s^2},$$

$$v = \frac{s(\sin\theta - bs)}{1 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)s + (a^2 + b^2)s^2},$$

welche für $s = 0$ $u = 0$ und $v = 0$ liefern. (Einfacher folgert man dies beim Gebrauche complexer Veränderlichen aus der Formel (14) a. a. O., welche bei der Substitution $z = 1 : t$

$$w = \frac{1}{z - c} = \frac{t}{1 - ct}$$

giebt, so dass dem Werthe $t = 0$ der Werth $w = 0$, d. h. dem uneigentlichen Punkte der xy-Ebene der Nullpunkt der uv-Ebene entspricht.) — Um z. B. die dem unendlichen Quadranten YOX (Fig. 13c auf S. 114) entsprechende Fläche der Ebene $UO'V$ zu construiren, bemerke man, dass der Geraden $y = 0$ nach den Formeln (12) a. a O., wenn b nicht Null ist, der Kreis

$$b(u^2 + v^2) + v = 0,$$

welcher durch O' geht und seinen Mittelpunkt C auf der Axe VV' hat, zugeordnet ist. Dabei ist

$$O'C = -1 : 2b = -OE^2 : 2b,$$

wonach der Punkt C in der Figur construirt ist. Der positiven Seite der Geraden XX' entspricht, je nachdem b positiv oder negativ ist, der ausser- oder innerhalb dieses Kreises liegende Theil der Ebene; denn bei positivem y ist

$$\frac{v}{u^2 + v^2} > -b, \quad \text{also} \quad b(u^2 + v^2) + v > 0,$$

somit, je nachdem $b \gtrless 0$ ist,

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 \gtrless \frac{1}{4b^2}, \quad \text{d. h.} \quad M'C^2 \gtrless O'C^2.$$

Der Geraden $x = 0$ entspricht, wenn a nicht Null ist, der Kreis

$$a(u^2 + v^2) + u = 0,$$

welcher ebenfalls durch O' geht und seinen Mittelpunkt B mit der Abscisse $-1 : 2a$ auf der Axe UU' hat, und der positiven Seite von YY' der ausser- oder innerhalb des letzteren Kreises liegende Theil der Ebene, je nachdem a positiv oder negativ ist. Demnach entspricht in der Figur, worin $a < 0$, $b < 0$ ist, dem Quadranten YOX der den genannten beiden Kreisen gemeinsame Mond.

Eine einfache Substitution, wodurch der Quadrant YOX auf das Quadrat zwischen den Abscissen $u = 0$, $u = 1$ und den Ordinaten $v = 0$, $v = 1$ abgebildet wird, ist

$$u = 1 : (1 + x) \qquad v = 1 : (1 + y).$$

19. Anwendungen der Umwandlung uneigentlicher Doppelintegrale durch Einführung neuer Integrationsveränderlichen.

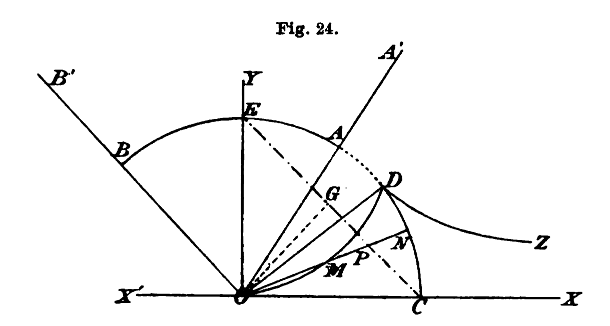
Die Einführung neuer Veränderlichen ist oft das einfachste Mittel, um zu erkennen, ob ein vorgelegtes uneigentliches Doppelintegral einen Sinn hat oder nicht. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

1) Die Function

$$1:(x^2+y^2)^\mu \qquad (\mu > 0), \tag{1}$$

welche in der Nachbarschaft des Anfangspunktes nicht endlich ist, sei über den Kreissector OAB (Fig. 24), dessen

Fig. 24.



Mittelpunkt O und dessen Radius $c = OC$ sei, zu integriren. Die Radien OA und OB seien bezüglich durch die Anomalien $X\hat{O}A = \alpha$, $X\hat{O}B = \beta$ bestimmt, wobei $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 2\pi$ ist.[1]) Wir gehen durch die Substitution

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

zu den Polarcoordinaten r, θ über (S. 113). Um den Sector OAB zu beschreiben, muss r das Intervall $(0, c)$, θ das von α bis β durchlaufen. Dann tritt an Stelle des vorgelegten Integrals

1) Ist der volle Kreis (O, c) das Integrationsgebiet für die Function (1), so muss man sich denselben bei Anwendung der Transformation des bezüglichen Doppelintegrals auf Polarcoordinaten längs eines Radius z. B OC aufgeschnitten denken, so dass die Punkte, welchen sowohl die Polarcoordinaten r, 0, als auch r, 2π zukommen, den Rand des Integrationsgebietes in der xy-Ebene bilden.

$$\iint_{(\mathfrak{R})} r^{1-2\mu}\, dr\, d\theta, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{R}$ das von den Geraden $r = 0$ $r = c$, $\theta = \alpha$ $\theta = \beta$ in der $r\theta$-Ebene gebildete Rechteck bedeutet. Nach dem Satze 4) auf S. 138 existirt das Doppelintegral (2) dann und nur dann, wenn die Integrale

$$\int_0^c \frac{dr}{r^{2\mu-1}} \text{ und } \int_\alpha^\beta d\theta$$

einen Sinn haben. Das gilt hinsichtlich des ersten dann und nur dann, falls $2\mu - 1 < 1$ d. i. $\mu < 1$ ist (I. S. 386). Es existirt mithin das Doppelintegral

$$\iint_{(OAB)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\mu}$$

dann und nur dann, wenn $\mu < 1$ ist, und zwar ist es in diesem Falle gleich

$$\int_0^c \frac{dr}{r^{2\mu-1}} \cdot \int_\alpha^\beta d\theta = \frac{(\beta-\alpha)c^{2-2\mu}}{2-2\mu}.$$

2) Man darf aber aus dem vorstehenden Ergebnisse nicht schliessen, dass die Function (1) über jedes endliche Gebiet, auf dessen Begrenzung der Punkt O liegt, nur dann ein Doppelintegral zulässt, wenn $\mu < 1$ ist. Das ist, wie das nachstehende Beispiel lehrt, keineswegs nothwendig.[1])

Setzen wir der Kürze halber $OC = c = 1$ und ziehen von O aus eine Curve

$$y = x^\lambda \quad (\lambda > 1). \tag{3}$$

Sie schneide den Kreis CAB im Punkte D, dessen Anomalie

$$C\hat{O}D = \delta$$

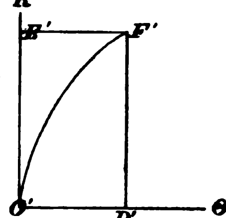
sich aus der Gleichung $\sin\delta = \cos\delta^\lambda$ ergiebt. Wir untersuchen nun, unter welchen Umständen die Function (1) ein Doppelintegral über das gemischtlinige Dreieck $OCDMO (\equiv \mathfrak{D})$ zulässt. Zu diesem Behufe führen wir wie oben die Polarcoordinaten r, θ ein. Bei constantem θ geht r von $OM = \varphi(\theta)$ bis $ON = 1$. Dabei ist $\varphi(\theta)$ der Werth, welcher sich für r aus der Gleichung (3) ergiebt, wenn wir darin $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ setzen. Somit ist

$$\varphi(\theta) = (\sin\theta\cos\theta^{-\lambda})^{\frac{1}{\lambda-1}}. \tag{4}$$

1) Diese Bemerkung verdanke ich K. Adler, der sie an dem Falle, dass $\mu = 1$, $\lambda = 2$ ist, gemacht hat.

θ durchläuft das Intervall $(0, \delta)$. Demnach entspricht dem Gebiete $\mathfrak{D}$ der xy-Ebene das in Fig. 25 gezeichnete Gebiet $\Delta \equiv O'F'E'$ der $r\theta$-Ebene, wobei $O'D' = \delta$, $O'E' = D'F' = 1$ zu denken ist. Da die Function $1 : r^{2\mu - 1}$, welche nach der Transformation im Doppelintegral erscheint, im Falle dass $\mu > 1 : 2$ ist, nur in O' unendlich wird, so können wir darauf den Satz auf S. 135 anwenden. Es ist daher das Doppelintegral

Fig. 25. $(\lambda > 2)$.



$$\iint_{(\mathfrak{D})} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\mu} = \iint_{(\Delta)} \frac{dr\,d\theta}{r^{2\mu-1}} \tag{5}$$

vorhanden oder nicht, je nachdem das zweimalige Integral

$$\int_0^\delta d\theta \int_{\varphi(\theta)}^1 \frac{dr}{r^{2\mu-1}}$$

einen Sinn hat oder nicht. Ist $\mu \gtrless 1$, so haben wir nach (4)

$$\int_{\varphi(\theta)}^1 \frac{dr}{r^{2\mu-1}} = \Bigg|_{\varphi(\theta)}^{1} - \frac{1}{(2\mu-2)\,r^{2\mu-2}} = \frac{1}{2\mu-2}\left(\frac{\cos\theta^\lambda}{\sin\theta}\right)^{\frac{2\mu-2}{\lambda-1}} - \frac{1}{2\mu-2}.$$

Um zu beurtheilen, unter welchen Umständen das Integral

$$\int_0^\delta \left(\frac{\cos\theta^\lambda}{\sin\theta}\right)^{\frac{2\mu-2}{\lambda-1}} d\theta \tag{5*}$$

existirt, benutzen wir das Kriterium auf S. 404 d. I. T. Das Product

$$\theta^{\frac{2\mu-2}{\lambda-1}}\left(\frac{\cos\theta^\lambda}{\sin\theta}\right)^{\frac{2\mu-2}{\lambda-1}} = \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{2\mu-2}{\lambda-1}} (\cos\theta)^{\frac{(2\mu-2)\lambda}{\lambda-1}}$$

hat bei $\lim \theta = +0$ den Grenzwerth 1. Also existirt das Integral (5*), wenn $(2\mu-2):(\lambda-1) < 1$ d. i. $2\mu < \lambda + 1$ ist. Und zwar nur dann, weil $\theta\,\varphi(\theta)^{2-2\mu}$ nur unter dieser Bedingung bei $\lim \theta = +0$ den Grenzwerth Null hat. Wir haben somit, falls $1 \lessgtr \mu < \frac{\lambda+1}{2}$ ist, nach (5) die Formel

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\mu} = \frac{1}{2\mu-2}\left[\int_0^\delta \left(\frac{\cos\theta^\lambda}{\sin\theta}\right)^{\frac{2\mu-2}{\lambda-1}} d\theta - \delta\right].$$

Ist $\mu = 1$, so gewinnt man durch eine ähnliche Rechnung für dieses Doppelintegral den Werth

$$-\frac{1}{\lambda-1}\int_0^\delta l\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta^\lambda}\right) d\theta.$$

Demnach besitzt die Function (1) ein Doppelintegral über die Fläche $\mathfrak{D}$, wenn $\mu < (\lambda+1):2$ ist und zwar nur dann.

3) Man wird ferner leicht nachweisen, dass die Function (1) über das ins Unendliche ausgedehnte Gebiet $B'BAA'$ in Fig. 24 und über die Aussenseite des von O mit dem Radius OC beschriebenen Kreises dann und nur dann ein uneigentliches Doppelintegral besitzt, wenn $\mu > 1$ ist. Lässt man aber den Punkt D auf der Curve DZ mit der Gleichung

$$yx^\lambda = 1 \quad \lambda > 0$$

liegen, so lässt die Function (1) ein Doppelintegral über die ins Unendliche ausgedehnte gemischtlinige Fläche $ZDCX$ zu dann und nur dann, wenn $\mu > \frac{1-\lambda}{2}$ ist.

4) Es ist die Function

$$1:(c^2 - x^2 - y^2)^\mu \quad (\mu > 0) \tag{6}$$

über den Kreissector OAB in Fig. 24 zu integriren. Diese Function wird längs des ganzen Bogens AB unendlich. Führt man nochmals für x, y die Polarcoordinaten r, θ ein, so tritt an Stelle des vorgelegten Integrals

$$\int\int_{(\mathfrak{R})} \frac{r\,dr\,d\theta}{(c^2 - r^2)^\mu},$$

unter $\mathfrak{R}$ dasselbe Gebiet verstanden wie in (2). Dieses Integral hat nach dem Satze 4) auf S. 135 dann und nur dann eine Bedeutung, wenn das Integral

$$\int_0^c \frac{r\,dr}{(c^2 - r^2)^\mu}, \text{ d. i. } \frac{1}{2}\int_0^{c^2} \frac{ds}{(c^2 - s)^\mu} \quad (r^2 = s)$$

existirt. Und das findet nur dann statt, wenn $\mu < 1$ ist. Unter dieser Voraussetzung haben wir also

$$\int\int_{(OAB)} \frac{dx\,dy}{(c^2 - x^2 - y^2)^\mu} = \frac{1}{2}\int_0^{c^2} \frac{ds}{(c^2 - s)^\mu} \cdot \int_\alpha^\beta d\theta = \frac{(\beta - \alpha)\,c^{2-2\mu}}{2 - 2\mu}.$$

Dagegen lässt die Function (6) über das gleichschenklige Dreieck OCE (Fig. 24), dessen Umfang mit dem Kreisquadranten CDE blos zwei Punkte gemein hat, ein Doppelintegral zu, wenn nur $\mu < 2$ ist.[1]) Ist dieses Doppelintegral vorhanden, so muss es durch die Einführung der Polarcoordinaten zufolge des Satzes auf S. 135 in das zweimalige Integral

1) Diese Bemerkung nach der von A. Harnack (Elem. d. Diff.- u. Integralr. S. 323) an einem ähnlichen Doppelintegral gemachten.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{c^2:(\cos\theta+\sin\theta)^2} \frac{ds}{(c^2-s)^\mu} \tag{7}$$

übergehen. Bei constantem θ hat nämlich r die Strecke von 0 bis $OP = c:(\cos\theta + \sin\theta)$ zu durchlaufen, um die Gerade CE, deren Gleichung $x+y=c$ ist, zu erreichen. Man theilt die Integration nach θ in die beiden von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ und von $\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{2}$ und findet durch die Substitution

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta',$$

dass das zweite Integral dem ersten gleich ist. Der Ausdruck (7) verwandelt sich daher in

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{c^2:(\cos\theta+\sin\theta)^2} \frac{ds}{(c^2-s)^\mu}.$$

Dabei ist unter der Voraussetzung, dass $\mu \gtrless 1$ ist,

$$\int_0^{c^2:(\cos\theta+\sin\theta)^2} \frac{ds}{(c^2-s)^\mu} = \frac{1}{(\mu-1)\,c^{2\mu-2}} \times \left\{\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin 2\theta}\right)^{\mu-1} - 1\right\}.$$

Das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin 2\theta}\right)^{\mu-1} d\theta$$

existirt aber nach dem Kriterium auf S. 404 d. I. T. dann und nur dann, wenn $\mu - 1 < 1$, d. i. $\mu < 2$ ist. Unter dieser Bedingung hat man demnach

$$\iint_{(OCE)} \frac{dx\,dy}{(c^2-x^2-y^2)^\mu} = \frac{1}{(\mu-1)\,c^{2\mu-2}} \times \left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin 2\theta}\right)^{\mu-1} d\theta - \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Zu einem ähnlichen Ergebnisse gelangt man im Falle, dass $\mu = 1$ ist, und zwar hat man

$$\iint_{(OCE)} \frac{dx\,dy}{c^2-x^2-y^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin 2\theta}\right) d\theta.$$

5) Durch die Substitution $x = u:a$, $y = v:b$ kann man aus den vorstehenden Ergebnissen die entsprechenden für die Functionen

$$1 : \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)^\mu \qquad 1 : \left(c^2 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)^\mu \tag{8}$$

ableiten, wobei an Stelle des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ die Ellipse

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = c^2$$

tritt. Unmittelbar erhält man dieselben, indem man die Doppelintegrale der Functionen (8) durch die Ivory'sche Substitution (S. 117) umwandelt.

20. Fortsetzung. Darstellung des Euler'schen Integrals erster Art durch Gammafunctionen (3. Beweis).

Ein besonderer Fall der unter 4) auf S. 155 erwähnten Formel ist die folgende:

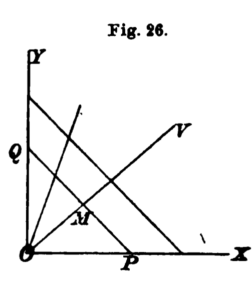
$$\left.\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\,dy \,.\int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x}\,dx \\ &= \iint_{(YOX)} y^{\alpha-1} x^{\beta-1} e^{-x-y}\,dx\,dy,\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

worin α, β beliebige positive Zahlen sein dürfen und XOY den ins Unendliche ausgedehnten ersten Quadranten bedeutet. An diesem Doppelintegral führe man die Transformation

$$x = u(1-v) \qquad y = uv \tag{b}$$

mit der Functionaldeterminante $J(u, v) = u$ durch. Einem constanten u entspricht die Gerade $x + y = u$, welche von den positiven Axen je das Stück u abschneidet (PQ in Fig. 26), einem constanten v die Gerade $vx = (1-v)y$ durch den Punkt $O(OV)$. Um den ganzen Quadranten mit Schnittpunkten (M) der Parallelen zu PQ und der Strahlen des Büschels O zu bedecken, muss u alle Werthe von 0 bis $+\infty$, v alle von 0 bis 1 annehmen. Das Gebiet Φ in der uv-Ebene ist mithin der zur u-Axe parallele Streifen π im ersten Quadranten zwischen den Geraden $v = 0$ und $v = 1$. Lassen wir du, dv, sowie dx, dy positiv sein, so ist

Fig. 26.



$$J(u, v)\, du\, dv = u\, du\, dv$$

positiv, folglich in (6) auf S. 190 $\iota = 1$ zu setzen. Nach allem diesen ergiebt sich die Umformung

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \iint_{(n)} u^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1} e^{-u}\, du\, dv \\ &= \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-u}\, du \,.\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\, dv \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)\mathrm{B}(\alpha, \beta). \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Dies ist der einfachste Beweis der schon in XVI. 8 und XVIII. 16 erwähnten Euler'schen Formel.[1])

---

1) Vgl. Jacobi, Werke VI. S. 62. Schon früher hatte Poisson (J. de l'Éc. polyt. Cah. 19 S. 477) das Doppelintegral (a) durch die in zwei Schritte zerlegte Substitution

$$x = u : (1 + w) \qquad y = uw : (1 + w),$$

welche dadurch, dass v für $w : (1 + w)$ gesetzt wird, in die Jacobi'sche (b) übergeht, in das Product (c) verwandelt.

XIX. Abschnitt.

Geometrische Anwendungen der Doppelintegrale.

1. Die Zahl für eine beliebige ebene Fläche.

Bereits auf S. 60 wurde gelegentlich die Zahl für eine von beliebig vielen gewöhnlichen Rändern begrenzte, im Endlichen gelegene Fläche $\mathfrak{F}$ durch das eigentliche Doppelintegral

$$S_{\mathfrak{F}}\, dx\, dy \tag{1}$$

erklärt. Durch Einführung der Veränderlichen u, v mittelst der Gleichungen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ lässt sich das Doppelintegral (1) auf die Form

$$\iota\, S_{\Phi}\, J(u, v)\, du\, dv \qquad (\iota = \pm 1) \tag{2}$$

bringen (S. 111). So erhält die Flächenzahl z. B. bei Zugrundelegung von Polarcoordinaten r, θ (S. 113), wobei

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$\iota\, S_{\Phi}\, r\, dr\, d\theta, \tag{3}$$

worin, wenn r, dr, $d\theta$ als positiv angesehen werden, ι das Zeichen der vorgelegten Fläche $\mathfrak{F}$ bedeutet.

Auch des namentlich für die Berechnung von Flächenzahlen oftmals sehr bequemen Satzes, dass die Zahl einer aus einer endlichen Anzahl von Theilen zusammengesetzten ebenen Fläche gleich der Summe der diesen Theilen zukommenden Zahlen ist, wurde bereits gedacht (S. 77). Es wäre nicht logisch, denselben zur Erklärung der Zahl einer aus Theilen bestehenden Fläche zu benutzen.

2. Zurückführung der Zahl einer ebenen Fläche auf ein einfaches Integral.

Versteht man unter $\mathfrak{F}$ die in Fig. 10 auf S. 82 gezeichnete Fläche $K_1 L_1 L_2 K_2$, deren Begrenzung aus den zur

y-Axe parallelen Strecken K_1K_2, L_1L_2 und den Curven K_1L_1, K_2L_2, deren Gleichungen bezw. $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ seien, besteht, so findet man (S. 91) für die Zahl von $\mathfrak{F}$

$$S_{\mathfrak{F}}\, dx\, dy = \int_a^{a'} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx. \qquad (4)$$

Wenn die Curven $y = \varphi_1(x)$ und $y = \varphi_2(x)$ sich auf derselben, z. B. der positiven Seite der y-Axe, ins Unendliche erstrecken und dabei $\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$ für alle Werthe von x

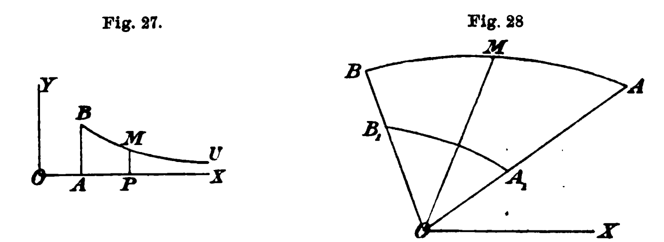


Fig. 27. Fig. 28

grösser als a dasselbe Zeichen hat und bei $\lim x = +\infty$ zum Grenzwerthe Null convergirt, so gilt im Falle, dass das Integral

$$\int_a^{\infty} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx \qquad (5)$$

einen Sinn hat, dasselbe als Zahl der Fläche, welche von der Strecke K_1K_2 und den von K_1 und K_2 ausgehenden Curven begrenzt wird. Dies folgt unmittelbar aus der auf S. 148 für die Zahl einer solchen Fläche aufgestellten Erklärung vermittelst des 1. Satzes auf S. 152.

Beispiel. Wir denken uns in der xy-Ebene die Curve

$$y = 1 : x^{\mu} \qquad (\mu > 1)$$

von dem der positiven Abscisse $x = a = OA$ entsprechenden Punkte B an bis ins Unendliche construirt (Fig. 27). Dann gehört zu der von dem unendlichen Bogen BU, dem unendlichen Halbstrahle AX und der Ordinate AB begrenzten Fläche $UBAX$ eine endliche Zahl, nämlich, da in (5) $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1 : x^{\mu}$ zu setzen ist,

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}} = \frac{1}{(\mu - 1)a^{\mu - 1}} \qquad (\mu > 1).$$

Auf dieselbe Art ergiebt sich aus der Formel (3) für den positiven Sector OAB (Fig. 28), dessen Bogen AB von jedem innerhalb des Winkels AOB gelegenen Halbstrahle

durch O blos in **einem** Punkte M und zwar im Abstande $OM = r_\theta$ von O geschnitten wird, wenn die Anomalien $\widehat{XOA}$ und $\widehat{XOB}$ mit α und β bezeichnet werden,

$$\left.\begin{array}{c} \widehat{OAB} = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r_\theta} r\,dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_\theta^2\,d\theta \\ (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi). \end{array}\right\} \quad (6)$$

Ist $\alpha = 0$ und $\beta = 2\pi$, so geht der Sector über in die Fläche, welche begrenzt ist von einer einfachen geschlossenen Linie, die den Punkt O umgiebt und von jedem Halbstrahl durch ihn nur in **einem** Punkte geschnitten wird. Wenn $r_\alpha = r_\beta = 0$ ist, so fallen die Punkte AB beide mit O zusammen und es werden die Halbstrahlen OA, OB zu den Halbtangenten in O der nunmehr geschlossenen krummen Linie, welche die Fläche begrenzt.

Betrachten wir ferner die Fläche ABB_1A_1, welche begrenzt ist von den geraden Strecken AA_1 und BB_1 und den krummen Linien AB, A_1B_1 mit den Polargleichungen

$$r = f(\theta) \quad \text{und} \quad r = f_1(\theta),$$

wobei $f(\theta)$ und $f_1(\theta)$ für alle Werthe von θ: $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ eindeutig, stetig und nicht-negativ sein sollen, so finden wir dafür aus (3) den Ausdruck

$$\left.\begin{array}{l} ABB_1A_1 = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{f_1(\theta)}^{f(\theta)} r\,dr \\ \quad = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(\theta)^2 - f_1(\theta)^2\}\,d\theta\,.\ (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Beispiele zur Formel (6). 1) „Der Inhalt (A) der Ellipse mit der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \qquad (ac - b^2 > 0, \quad a > 0, \quad c > 0)$$

in den rechtwinkligen Coordinaten x, y ist $\pi : \sqrt{ac - b^2}$." Setzt man nämlich hier $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, so findet man

$$r^2 = 1 : (a\cos\theta^2 + 2b\cos\theta\sin\theta + c\cos\theta^2),$$

somit nach (6)

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a\cos\theta^2 + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin\theta^2}.$$

Zerlegt man dieses Integral in die beiden von 0 bis π und von π bis 2π, so erweist sich das letztere durch die Substitution $\theta = \pi + \theta'$

als mit dem ersteren identisch. Theilt man das Integral von 0 bis π in die beiden von 0 bis $\pi:2$ und von $\pi:2$ bis π und führt alsdann in diese die neue Veränderliche $u = \tan\theta$ ein, so erhält man nach (10) auf S. 392 d. I. T. die Formel

$$\mathsf{A} = \pi : \sqrt{ac - b^2}.$$

2) „Der Inhalt einer jeden der beiden Hälften der Lemniscate

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

(vgl. II. S. 302) ist nach (6)

$$\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}.\text{“}$$

3) „Der Inhalt des zum Folium Cartesii, dessen Gleichung

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

ist, gehörigen Ovals beträgt $\frac{1}{6}a^2$.“ Man setze wieder

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta.$$

3. Fortsetzung. Man kann das Doppelintegral (1), wie auf S. 101 angeführt ist, mittelst des Green'schen Satzes in das Aggregat von so vielen einfachen Integralen verwandeln, als die Fläche $\mathfrak{F}$ Ränder hat. Besitzt sie nur den einen Rand $\mathfrak{r}$, welcher durch die Gleichungen

$$x = x_\tau \quad y = y_\tau \quad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \tag{8}$$

dargestellt ist, so erhalten wir für ihre Zahl A die Formel

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dx_\tau}{d\tau}\right) d\tau. \tag{9}$$

Einen besonderen Fall davon bildet die Formel (6), wenn $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ ist. Man braucht nur als Parameter τ die Anomalie θ zu nehmen.

Kommen im Rande $\mathfrak{r}$ mindestens zwei Ecken, d i. Punkte mit zwei verschiedenen Halbtangenten oder Krümmungsradien nach vorn und nach rückwärts vor, so wird das Integral A in ihnen getheilt, so dass es in eben so viele Theile zerfällt, als Ecken da sind. Jedes dieser Theilintegrale kann durch Einführung einer neuen Veränderlichen ω an Stelle von τ umgeformt werden. Demnach darf man irgend eine analytische Darstellung des von zwei aufeinanderfolgenden Ecken begrenzten Stückes von $\mathfrak{r}$, das auch eine gerade Strecke sein kann, verwenden; nur ist das bezügliche

Theilintegral so anzusetzen, dass während die Integrationsveränderliche von der unteren zur oberen Grenze desselben übergeht, das betrachtete Stück von $\mathfrak{r}$ in dem vorgeschriebenen Sinne zurückgelegt wird. — Wendet man das Gesagte auf den Sector OAB in Fig. 28 an, wobei der Bogen AB, welcher jetzt durch die Gleichungen (8) dargestellt werde, keiner Beschränkung mehr unterworfen ist, so erhält man

$$\widehat{OAB} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dx_\tau}{d\tau}\right) d\tau + J(BO) + J(OA).$$

Die auf die Strecken BO und OA entfallenden Integrale $J(BO)$, $J(OA)$ verschwinden; denn führt man in den Ausdruck

$$x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau}$$

z. B.

$$x_\tau = \tau \cos \widehat{XOB} \quad y_\tau = \tau \sin \widehat{XOB} \quad (OB \geqq \tau \geqq 0)$$

ein, so ist er identisch Null. Wir gelangen somit zur Formel

$$\widehat{OAB} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau}\right) d\tau. \tag{9*}$$

Sie lässt sich auch aus der Formel (6), welche ein besonderer Fall von ihr ist, dadurch ableiten, dass man unter dem $\int$ an Stelle von θ die Veränderliche τ vermittelst der Formeln

$$r_\theta \cos \theta = x_\tau \qquad r_\theta \sin \theta = y_\tau$$

einführt.

Das Integral in (9) gilt als Definition für die zu einer beliebigen, sich selbst schneidenden geschlossenen Linie $\mathfrak{r}$, welche durch die Gleichungen (8) dargestellt ist, gehörige Flächenzahl. Eine solche Linie zerfällt nämlich in eine bestimmte Anzahl von einfachen geschlossenen Linien. In eben so viele Glieder, die für sich sowohl positiv als negativ sein können, lässt sich dann auch die rechte Seite von (9) zerlegen.

Hat z. B. die Linie $\mathfrak{r}$ nur den einen Doppelpunkt, welcher den Werthen $\tau = \gamma$ und $\tau = \delta$ $(\alpha < \gamma < \delta < \beta)$ des Parameters entspricht,

so zerfällt sie in zwei einfach geschlossene Linien (Ovale) (vgl. Fig. 29). Das Integral in (9) zerlegt man in

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\gamma \cdots + \frac{1}{2}\int_\gamma^\delta \cdots + \frac{1}{2}\int_\delta^\beta \cdots$$

Das zweite giebt unmittelbar die Zahl der von einem der Ovale begrenzten Fläche an und zwar ist diese positiv oder negativ je nach dem Sinne, in welchem das Oval bei der dem wachsenden τ entsprechenden Bewegung beschrieben wird. Das erste und dritte jener Integrale fasst man zur Zahl für die vom zweiten Ovale begrenzte Fläche zusammen, indem man im dritten $\tau = \tau' + \delta - \gamma$ setzt, so dass dem Werthe $\tau = \delta$ der Werth $\tau' = \gamma$ entspricht.

Fig. 29.

Ist die Fläche $\mathfrak{F}$ von zwei Rändern $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ begrenzt (Fig. 12 auf S. 97), wovon der erstere durch die Gleichungen (8), der letztere durch die Gleichungen

$$x = x_{1\tau} \quad y = y_{1\tau} \quad (\alpha_1 \leqq \tau \leqq \beta_1)$$

dargestellt sei, so erhalten wir ihre Zahl (A) aus der Formel

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x_\tau \frac{dy_\tau}{d\tau} - y_\tau \frac{dx_\tau}{d\tau}\right) d\tau - \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(x_{1\tau} \frac{dy_{1\tau}}{d\tau} - y_{1\tau} \frac{dx_{1\tau}}{d\tau}\right) d\tau. \quad (10)$$

In ihr ist als besonderer Fall die Formel (7) enthalten, wenn man sich dort $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ denkt.

Beispiel. „Es sei in der xy-Ebene eine einfache, geschlossene Linie gegeben, in jedem Punkte mit einer vollständigen Tangente versehen, welche sich längs der Linie stetig ändert. Denken wir sie uns im positiven Sinne beschrieben und führen den von einem festen Punkte der Linie an gezählten Bogen σ als Parameter ein, so seien die Coordinaten eines willkürlichen Punktes M derselben durch die Gleichungen $x = X_\sigma$ $y = Y_\sigma$ $(0 \leqq \sigma \leqq \lambda)$ dargestellt, wobei λ die Länge der ganzen Linie bedeutet. In M errichte man die Normale der Curve, wobei der auf die Innenseite der Linie fallende Halbstrahl als ihre positive Richtung n zu bezeichnen ist, und trage auf dem Halbstrahle n ein Stück $MN_1 = H$ auf. Der Punkt N_1 beschreibt, wenn H gehörig klein gewählt ist, die innere Aequidistante zur gegebenen Linie. Tragen wir auf der äusseren Normale in M das Stück $MN = -H$ auf, so beschreibt N die äussere Aequidistante zur gegebenen Linie. Der Inhalt des von diesen beiden Aequidistanten zur gegebenen Linie eingeschlossenen Ringes beträgt $2H\lambda$." — Da, wie bereits auf S. 96 bemerkt wurde,

$$\cos \widehat{xn} = -\frac{dY_\sigma}{d\sigma} \qquad \sin \widehat{xn} = \frac{dX_\sigma}{d\sigma}$$

ist, so finden wir für die Coordinaten $x_\sigma y_\sigma$ von N

$$x_\sigma - X_\sigma = MN \cos \widehat{xn} = \quad H\frac{dY_\sigma}{d\sigma}$$

$$y_\sigma - Y_\sigma = MN \sin \widehat{xn} = -H\frac{dX_\sigma}{d\sigma},$$

d. i.

$$x_\sigma = X_\sigma + H\frac{dY_\sigma}{d\sigma} \quad y_\sigma = Y_\sigma - H\frac{dX_\sigma}{d\sigma}. \tag{11}$$

Die Coordinaten $x_{1\sigma}\, y_{1\sigma}$ von N_1 sind dagegen

$$x_{1\sigma} = X_\sigma - H\frac{dY_\sigma}{d\sigma} \quad y_{1\sigma} = Y_\sigma + H\frac{dX_\sigma}{d\sigma}. \tag{12}$$

Wir haben nun in (10) an Stelle von $x_\tau\, y_\tau$ die Ausdrücke (11), an Stelle von $x_{1\tau}\, y_{1\tau}$ (12) zu setzen und können die beiden Integrale, da ihre Grenzen dieselben, nämlich $\sigma = 0$ und $\sigma = \lambda$ sind, in eines zusammenziehen. Bemerken wir noch, dass

$$\frac{dx_\sigma}{d\sigma} = \frac{dX_\sigma}{d\sigma} + H\frac{d^2 Y_\sigma}{d\sigma^2}, \quad \frac{dy_\sigma}{d\sigma} = \frac{dY_\sigma}{d\sigma} - H\frac{d^2 X_\sigma}{d\sigma^2}$$

u. s. w. ist, so erhalten wir schliesslich für jene Ringfläche

$$\mathsf{A} = H\int_0^\lambda \left[\left(\frac{dX_\sigma}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dY_\sigma}{d\sigma}\right)^2 - X_\sigma\frac{d^2X_\sigma}{d\sigma^2} - Y_\sigma\frac{d^2Y_\sigma}{d\sigma^2}\right] d\sigma. \tag{13}$$

Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$\int_0^\lambda \left(X_\sigma\frac{d^2X_\sigma}{d\sigma^2} + Y_\sigma\frac{d^2Y_\sigma}{d\sigma^2}\right) d\sigma = \Big|_0^\lambda \left(X_\sigma\frac{dX_\sigma}{d\sigma} + Y_\sigma\frac{dY_\sigma}{d\sigma}\right)$$

$$-\int_0^\lambda \left[\left(\frac{dX_\sigma}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dY_\sigma}{d\sigma}\right)^2\right] d\sigma,$$

worin der Minuend verschwindet, weil für $\sigma = \lambda$ sowohl der die Curve $X_\sigma\, Y_\sigma$ beschreibende Punkt M, als auch die Tangente in demselben in ihre Anfangslage bei $\sigma = 0$ zurückkehren. Somit erhält man aus (13) die Formel

$$\mathsf{A} = 2H\int_0^\lambda \left[\left(\frac{dX_\sigma}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dY_\sigma}{d\sigma}\right)^2\right] d\sigma = 2H\lambda, \tag{14}$$

da bekanntlich (vgl. S. 318 d. II. T.)

$$\left(\frac{dX_\sigma}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dY_\sigma}{d\sigma}\right)^2 = 1$$

ist.

4. Die allgemeine und vollständige Erklärung der Körperzahl und zwar der absoluten und relativen.

Will man logisch vorgehen, so muss man die Erklärung jener Zahl, welche der Inhalt eines vorgelegten Körpers

heissen soll, an die Spitze stellen. Auf Grund anschaulicher Vergleichung lassen sich, wie aus den Elementen der Stereometrie bekannt ist, blos die Zahlen der Prismen feststellen. Schon die Zahl des Tetraeders hat bisher nur als Grenzwerth von Prismensummen erklärt werden können. Ihre vollständige Begründung erfährt sie auf die nämliche Weise, wie die aller übrigen Körper, die keine Prismen sind.

Wir können dabei ganz ähnlich vorgehen, wie bei der Aufstellung der Flächenzahl in XVII. 4. Es sei ein von einer endlichen Anzahl von einfachen geschlossenen Flächen begrenzter Körper $\mathfrak{K}$ gegeben, dessen Oberfläche mit jeder Parallelen zu einer der drei rechtwinkligen[1]) Coordinatenaxen höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten (vgl. S. 38) gemein hat. Nun denke man sich eine Schaar von Prismen $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ construirt, welche den Körper $\mathfrak{K}$ gerade erfüllen, so dass also jedes von ihnen mindestens einen Punkt mit $\mathfrak{K}$ gemein hat und jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ mindestens zu einem von ihnen gehört. Alsdann hat $\sum_1^n {}_r \tau_r$ einen positiven endlichen Grenzwerth K, wenn jedes Prisma nach den drei Dimensionen des Raumes ins Unendliche abnimmt. Denselben Grenzwerth besitzt unter den nämlichen Umständen die Summe aller jener unter den Prismen $\tau_1 \ldots \tau_n$ befindlichen, zu welchen blos Punkte von $\mathfrak{K}$ gehören. K ist die Zahl des Körpers $\mathfrak{K}$. Sie heisst auch das dreifache Integral jener Function, welche in jedem Punkte xyz des Körpers $\mathfrak{K}$ den Werth 1 hat, über denselben, so dass man setzen kann

$$\mathsf{K} = \int\int\int_{(\mathfrak{K})} dx\,dy\,dz. \tag{I}$$

1) Das System der Coordinaten x (Abscisse), y (Ordinate), z (Applicate) soll stets, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, rechtwinklig sein und zwar sollen die Axenwinkel

$$\widehat{xy} = \widehat{yz} = \widehat{zx} = \frac{\pi}{2}$$

und jede positive Axe die positive Normale für die von den beiden andern gebildete Ebene sein; d. h. das Auge in Z sieht die Viertelumdrehung von OX zu OY im Sinne von rechts (über vorne) nach links vor sich gehen u. s. w.

Bekanntlich lassen sich aus den Prismen relative Grössen ableiten. Bezeichnet man nämlich einen von beiden Drehungssinnen als den positiven, z. B. den dem Gange eines Uhrzeigers entgegengesetzten, und setzt im Umfange der einen von den beiden Grundflächen des Prismas einen bestimmten Umlauf fest, so erscheint derselbe von jedem Punkte der anderen Grundfläche aus entweder als positive oder negative Drehung. Der mit diesem Zeichen versehene Inhalt des Prismas bildet dessen relative Zahl. Um sie zu bezeichnen, schreibt man neben dem festgesetzten Umlauf der einen Grundfläche nach einander die ihren Ecken entsprechenden der andern, d. h. diejenigen, welche mit ihnen je auf einer der unter einander parallelen Seitenkanten des Prismas liegen. So erhält man z. B. für ein vierseitiges Prisma mit den Grundflächen $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, wobei $A_1 B_1 \ldots A_4 B_4$ die Seitenkanten des Prismas vorstellen, den Ausdruck

$$(A_1 A_2 A_3 A_4,\ B_1 B_2 B_3 B_4).$$ [1]

---

1) Denkt man sich in der Ebene $A_1 A_2 A_3 A_4$ den positiven Drehungssinn willkürlich festgesetzt, so nennt man diejenige Seite einer Normalen auf dieselbe die positive, von welcher aus diese Drehung als dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint. Zieht man dann von B_1 das Loth $B_1 H_1$ auf die Ebene $A_1 A_2 A_3 A_4$, so hat man für die relative Zahl des in Rede stehenden Prismas

$$(A_1 A_2 A_3 A_4,\ B_1 B_2 B_3 B_4) = A_1 A_2 A_3 A_4 \times H_1 B_1.$$

Dabei ist das Zeichen der Fläche $A_1 A_2 A_3 A_4$ gemäss des in ihrer Ebene angenommenen positiven Drehungssinnes und das der Strecke $H_1 B_1$ gemäss der positiven Normalenrichtung zu dieser Ebene zu bestimmen.

Lassen wir dieses Prisma ein Parallelepiped sein, dessen Kanten in der Ordnung $A_1 A_2$, $A_1 A_4$, $A_1 B_1$ den drei im Punkte O entspringenden, beliebig gewählten Richtungen x, y, z parallel sind, so haben wir

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_1 A_2 \,.\, A_1 A_4 \sin \widehat{xy}, \quad H_1 B_1 = A_1 B_1 \cos \widehat{zp},$$

unter p die positive Normale auf die Ebene xy verstanden. Demnach finden wir

$$(A_1 A_2 A_3 A_4,\ B_1 B_2 B_3 B_4) = A_1 A_2 \,.\, A_1 A_4 \,.\, A_1 B_1 \sin \widehat{xy} \cos \widehat{zp}.$$

Das Product $\sin \widehat{xy} \cos \widehat{zp}$ heisst nach v. Staudt (Journal f. Math. 24 Bd. S. 252) Sinus der Ecke xyz und wird mit $\sin(xyz)$ bezeichnet.

Lassen wir nun die $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ entweder, wie oben, sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sein, so gelangen wir zur relativen Körperzahl, deren Zeichen mit dem gemeinsamen Zeichen der τ_r übereinstimmt. Die Formel (I) ist demnach dahin zu verallgemeinern, dass jede von den Zahlen dx, dy, dz auch negativ sein darf. — Eine andere Deutung des Vorzeichens der Körperzahl K findet man auf S. 222.

Aus der obigen Erklärung der Körperzahl ergiebt sich der auch für die Berechnung von Körperzahlen wichtige Satz, dass die Zahl eines aus einer endlichen Anzahl von Theilen bestehenden Körpers, welche mit ihm gleichbezeichnet sind, gleich der Summe der diesen Theilen zukommenden Zahlen ist — und zwar auf die nämliche Weise, wie der ihm entsprechende Satz über die Flächenzahl auf S. 77 gefunden wurde. Ferner geht aus der Formel (I) unmittelbar die Bemerkung hervor, dass zu congruenten Körpern $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die nämlichen Zahlen gehören. Denn es kann ja $\mathfrak{K}'$ an die Stelle von $\mathfrak{K}$ treten.

Das dreifache Integral (I) lässt sich durch Ausführung der Integration nach einer der Veränderlichen xyz in ein Doppelintegral oder in ein Aggregat von solchen verwandeln. Dasselbe Ziel erreicht man durch Anwendung des Green-schen Satzes für dreifache Integrale auf das Integral (I) (Nr. 9). Es geht dann in ein Aggregat von Doppelintegralen über, welche über die einzelnen Begrenzungsflächen von $\mathfrak{K}$ erstreckt sind. Wir wollen diese beiden Formeln aber auch unmittelbar aus der Figur herleiten, wobei freilich ihre Bedeutung insofern abgeschwächt wird, als nur ein Theil jener Grenzübergänge, denen sie ihre Entstehung verdanken, berücksichtigt wird.

Wenn man ein System schiefwinkliger Coordinaten $x y z$ im Raume zu Grunde legt, so hat man die rechte Seite der Formel (I), sowie auch die aller folgenden allgemeinen Cubaturformeln mit der Constanten $\sin(xyz)$ zu multipliciren. Dies ergiebt sich aus dem Vorstehenden unmittelbar mit Hilfe der in der letzten Note erwähnten Formel für den Inhalt eines Parallelepipeds.

5. Die Cubatur cylindrischer Körper.

Wir betrachten zunächst den folgenden Körper $\mathfrak{C}$. In allen Punkten der Begrenzung einer beliebigen in der xy-Ebene gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ denke man sich die Parallelen zur z-Axe gezogen, welche einen nach beiden Seiten unbegrenzten Cylinder bilden. Aus ihm werde durch zwei einander nicht schneidende Flächen ein Stück $\mathfrak{C}$ ausgeschnitten. Die Applicaten dieser Flächen seien durch die Gleichungen

$$z = f(x, y) \qquad z' = f'(x, y) \tag{1}$$

dargestellt, wobei $f(x, y)$ und $f'(x, y)$ für jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ eindeutige und stetige Functionen von x und y bedeuten. Und zwar soll für keinen solchen Punkt $z - z'$ negativ sein.

Alsdann haben wir für die Zahl des in Rede stehenden cylindrischen Körpers

$$\mathfrak{C} = \iiint_{(\mathfrak{C})} dx\, dy\, dz$$

und können in dem dreifachen Integral die Integration nach z bei constanten x und y ausführen. Dadurch erhalten wir

$$\mathfrak{C} = \iint_{(\mathfrak{F})} (z - z')\, dx\, dy.\text{[1]} \tag{2}$$

Das Zeichen von $\mathfrak{C}$ ist das Zeichen des Productes der Projection $\mathfrak{F}$ der beiden Endflächen (1) auf die xy-Ebene in die Strecke $z - z'$, welche ihr Zeichen nicht wechselt, während sie parallel zur z-Axe über $\mathfrak{F}$ verschoben wird.

Der Werth von $\mathfrak{C}$ lässt sich auf weniger allgemeine Art aus der Theorie der Doppelintegrale herleiten. Ueber das Gebiet $\mathfrak{F}$ wird ein System mit $\mathfrak{F}$ gleichbezeichneten Vielecken $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ in der Weise ausgebreitet, dass sie es gerade bedecken (S. 40). Wir errichten in den Punkten ihrer Umfänge ebenfalls die Senkrechten auf die xy-Ebene und verlängern eine jede so weit, bis sie die beiden Grenzflächen (1) von $\mathfrak{C}$ schneidet. Bezeichnet $x_r y_r$ $(r = 1, 2 \ldots n)$

1) Vgl. G. F. Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale nach Dirichlet 1871 § 145.

einen beliebigen Punkt des Vieleckes τ_r, so wissen wir aus XVII. 5 und 6, dass die Summe

$$\sum_1^n \{f(x_r, y_r) - f'(x_r, y_r)\}\tau_r$$

bei $\lim \tau_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ einen endlichen Grenzwerth hat. Derselbe kommt bei dem nämlichen Grenzübergange von der Summe

$$\sum_1^{n'} \{f(x'_r, y'_r) - f'(x'_r, y'_r)\}\tau'_r,$$

erstreckt blos über alle jene Vielecke $\tau'_r \ldots \tau'_{n'}$, welche ausschliesslich Punkte von $\mathfrak{F}$ enthalten, wobei x'_r, y'_r irgend einen Punkt des Vieleckes τ'_r bedeutet. Diesen Grenzwerth, welcher das Doppelintegral

$$\iint_{(\mathfrak{F})} \{f(x, y) - f'(x, y)\}\, dx\, dy \tag{3}$$

ist, ordnen wir dem Körper $\mathfrak{C}$ als Zahl zu, so dass wir wieder zur Formel (2) gelangen.

Häufig kommt von ihr der besondere Fall vor, dass eine der Flächen (1) die xy-Ebene selbst oder eine dazu parallele Ebene ist. Wenn z. B. $z' = 0$ ist, so geht die Formel (2) über in

$$\mathfrak{C} = \iint_{(\mathfrak{F})} z\, dx\, dy. \tag{4}$$

Das Zeichen von $\mathfrak{C}$, welches sich durch die der Formel (2) beigefügte Regel von vornherein bestimmen lässt, giebt an, ob der vorgeschriebene Umlauf längs des äusseren Randes von $\mathfrak{F}$ von einem beliebigen Punkte der Endfläche $z = f(x, y)$ aus als positiv oder negativ erscheint.

Wenn die Flächen (1) einander durchsetzen, so dass $z - z'$, während der Punkt xy die Fläche $\mathfrak{F}$ beschreibt, sein Zeichen wechselt, so stellt das Doppelintegral (3) die Summe der zu den einzelnen Zellen, welche jene Flächen aus dem unbegrenzten Cylinder ausschneiden, gehörigen relativen Zahlen dar. Dies ergiebt sich durch passende Zerlegung des Doppelintegrals (3) unmittelbar aus dem obigen Satze.

6. Beispiele. 1) Das Tetraëder $OABC$, dessen Ecken der Anfangspunkt der Coordinaten und die Punkte A, B, C auf den Axen

OX, OY, OZ sind (Fig. 30). Setzt man $OA = a$ $OB = b$ $OC = c$, so ist die Gleichung der Ebene ABC

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Folglich hat man nach (4) als Zahl T dieses Tetraëders

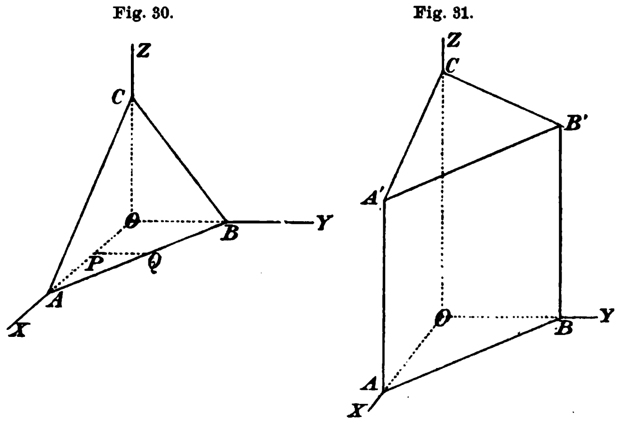
$$\mathsf{T} = \iint_{(OAB)} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right) dx\, dy.$$

Integrirt man zuerst nach x, lässt also $x = OP$ constant, so geht y von 0 bis PQ, d. i. $b - \frac{bx}{a}$. Man hat demnach

$$\mathsf{T} = c\int_0^a dx \int_0^{b-\frac{bx}{a}} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy = c\int_0^a dx \left| \left(1 - \frac{x}{a}\right) y - \frac{y^2}{2b} \right|_{y=0}^{y=b-\frac{bx}{a}}$$

$$= \frac{bc}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{bc}{2} \left| -\frac{a}{3}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right|_0^a = \frac{abc}{6}.$$

Die Strecken a, b, c können natürlich auch negative Werthe annehmen. Das Zeichen von T wird folgendermassen gedeutet. Man



findet $\mathsf{T} = abc:6 = OAB \cdot OC:3$, OAB und OC mit ihren Zeichen angesetzt. Diese Zahl T, einschliesslich ihres Zeichens, wird mit $OABC$ bezeichnet. Es hat somit das Tetraëder $OABC$, an dem die Aufeinanderfolge der Ecken wesentlich ist, das Zeichen + oder −, je nachdem OAB und OC gleich- oder entgegengesetzt bezeichnet sind, also je nachdem der Umlauf OAB von C aus als positiv oder negativ erscheint. Dies entspricht der Regel über das Zeichen von $\mathfrak{C}$ am Schlusse der vorigen Nummer.

2) Der dreiseitige Pfeiler oder prismatische Huf (P), welcher von dem über dem Dreiecke OAB in Fig. 31 stehenden

unbegrenzten Prisma, dessen Kanten der Axe OZ parallel sind, durch die Ebene $CA'B'$ abgeschnitten wird. Die Gleichung derselben ist, wenn $OC = c$ $AA' = c'$ $BB' = c''$ gesetzt werden,

$$z = c + \frac{c' - c}{a} x + \frac{c'' - c}{b} y.$$

Demnach hat man ähnlich wie oben

$$\mathsf{P} = \iint_{(OAB)} \left(c + \frac{c' - c}{a} x + \frac{c'' - c}{b} y\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{b - \frac{bx}{a}} \left(c + \frac{c' - c}{a} x + \frac{c'' - c}{b} y\right) dy = \frac{ab}{6}(c + c' + c'').$$

Der Inhalt des Pfeilers ist somit gleich dem Producte der Grundfläche $(ab:2)$ des Prismas in den Abstand der Schwerpunkte der beiden Dreiecksflächen OAB und $CA'B'$, d. i. $\frac{1}{3}(c + c' + c'')$.

3) Zone (oder Schichte) einer Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkt, gebildet von zwei zur Ebene zweier Hauptaxen parallelen Ebenen. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt und die Axen xyz in die Hauptaxen der Fläche, so haben diese Flächen folgende Gleichungen:

a) das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

b) das Hyperboloid mit zwei Mänteln

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

c) das ungetheilte Hyperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d) der elliptische Kegel

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Diese vier Gleichungen lassen sich auf die Form

$$z^2 = \alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma \tag{5}$$

bringen, worin $\beta = c:b$ ist. Die Vorzeichen von α und γ können beliebig sein, nur dürfen nicht beide „—“ sein, weil dann die Fläche imaginär werden würde.

Aus der Fläche (5) schneiden wir durch die beiden zur yz-Ebene parallelen Ebenen

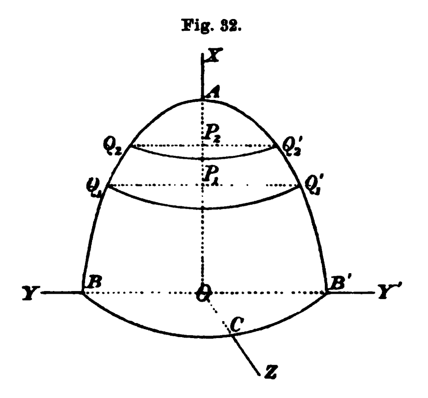
$$x = x_1 \quad x = x_2 \quad (x_1 < x_2)$$

eine Zone heraus, deren Inhalt Z zu berechnen ist. Sie wird von der xy-Ebene $(z = 0)$ geschnitten in einem Vierecke $Q_1 Q_2 Q_2' Q_1'$ oder $\mathfrak{F}$, gebildet von zwei Bogen des Kegelschnittes

$$\alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma = 0 \tag{6}$$

und zwei zur y-Axe parallelen Sehnen desselben. Die Figur 32 stellt die Hälfte unserer Zone im Falle des Ellipsoides dar. Es sind $OA = a$ $OB = B'O = b$, $OC = c$, $OP_1 = x_1$ $OP_2 = x_2$ $(-a \leqq x_1 < x_2 \leqq a)$. Sie erhebt sich über dem gemischtlinigen Vierecke $Q_1 Q_2 Q_2' Q_1'$, welches aus der Ellipse

Fig. 32.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

durch zwei zur y-Axe parallele Sehnen geschnitten ist. Wenn die Gleichung (5) auf eines der Hyperboloide sich bezieht, so ist die Curve (6) eine der Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Beim Kegel endlich ist $\gamma = 0$ und es zerfällt die Curve (6) in zwei durch O gehende Gerade.

Da zu dem beliebigen Punkte x, y die Applicaten

$$z = \sqrt{\alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma} \qquad z' = -\sqrt{\alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma}$$

gehören, so finden wir nach der Formel (2)

$$Z = 2 \iint_{(\mathfrak{F})} \sqrt{\alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma}\, dx\, dy.$$

Lassen wir $x = OP$ zunächst constant und integriren nach y, so sind die Grenzen $-\varphi(x)$ bis $+\varphi(x)$, wo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha x^2 + \gamma}$$

ist. Demnach ergiebt sich

$$Z = 2\beta \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \sqrt{\varphi(x)^2 - y^2}\, dy.$$

Aus der Formel für $\int y\,dx$ aus S. 314 d. I. T. erhält man, wenn man für x, y bezw. y, $\sqrt{\varphi^2 - y^2}$ schreibt,

$$\int_{-\varphi}^{\varphi} \sqrt{\varphi^2 - y^2}\, dy = \frac{\varphi^2}{2} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{dy}{\sqrt{\varphi^2 - y^2}} = \frac{\varphi^2 \pi}{2} \tag{7}$$

(vgl. S. 388 d. I. T.). Also ist

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{b\pi}{c} \int_{x_1}^{x_2} (\alpha x^2 + \gamma)\, dx = \frac{b\pi}{c} \left[\frac{\alpha (x_2^3 - x_1^3)}{3} + \gamma (x_2 - x_1) \right] \\ &= \frac{b (x_2 - x_1) \pi}{3c} \left[\alpha (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + 3\gamma \right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bemerkenswerthe besondere Fälle dieser Formel sind:

a) Die Haube oder Calotte H des Ellipsoides von der Höhe h bei der Annahme

$$\alpha = -\frac{c^2}{a^2} \quad \gamma = c^2 \quad x_1 = a - h \quad x_2 = a;$$

also

$$\mathsf{H} = \frac{bch^2\pi}{3a^2}(3a - h);\text{[1]}$$

b) die Haube oder Calotte H des getheilten Hyperboloids von der Höhe h bei der Annahme

$$\alpha = \frac{c^2}{a^2} \quad \gamma = -c^2 \quad x_1 = a \quad x_2 = a + h,$$

also

$$\mathsf{H} = \frac{bch^2\pi}{3a^2}(3a + h);$$

c) der Kegel mit der Spitze O, der Höhe a und der Ellipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

als Grundfläche, bei der Annahme

$$\alpha = \frac{c^2}{a^2} \quad \gamma = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = a,$$

wofür die rechte Seite von (8) in $abc\pi : 3$ übergeht.

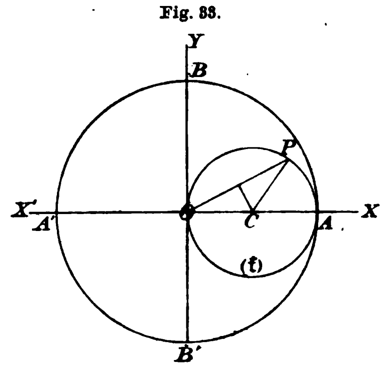
4) Auf ähnliche Art erhält man als Inhalt der Haube des elliptischen Paraboloids

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a},$$

welche durch die Ebene $x = x_1$ von ihm abgetrennt wird, die Zahl

$$bcx_1^2\pi : 2a.$$

Fig. 33.



5) Wir berechnen noch den Inhalt des Raumes, welcher gemeinsam ist einer Kugel und einem Cylinder, von dem ein über einen ihrer Radien geschlagener Kreis ein Normalschnitt ist. Wir wählen das Centrum der Kugel zum Anfangspunkte O (Fig. 33), legen die x-Axe in den gewählten Radius $OA = a$, und betrachten die Ebene des über OA als Durchmesser beschriebenen Kreises $\mathfrak{k}$ als

1) Hieraus erhält man für $h = 2a$ als Inhalt des ganzen Ellipsoides $4abc\pi : 3$.

xy-Ebene, so dass die Seiten des Cylinders der z-Axe parallel sind. Dann ist die Gleichung der Kugel

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

und es entsprechen jedem Punkte x, y der Kreisfläche $ABA'B'$ die beiden Applicaten

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \qquad z'=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Der in Rede stehende Raum befindet sich über und unter dem Kreise $\mathfrak{k}$ in der xy-Ebene. Wir erhalten demnach nach der Formel (2) für sein Volum V

$$V=2\int\int_{(\mathfrak{k})}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Die Berechnung dieses Integrals wird durch die Einführung von Polarcoordinaten (S. 113) sehr vereinfacht. Setzen wir also

$$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta$$

und bemerken, dass bei constantem $\theta=\widehat{XOP}$ r die Werthe von 0 bis $OP=a\cos\theta$ durchläuft und θ selbst das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ beschreibt, so erhalten wir

$$V=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr. \tag{9}$$

Da

$$\int r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2-r^2}\,d(r^2)=-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}$$

ist, so haben wir

$$\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=\frac{a^3}{3}(1\mp\sin\theta^3),$$

je nachdem θ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ liegt.

Bemerken wir sodann, dass

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin\theta^3)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta^3)\,d\theta$$

ist, so finden wir aus (9)

$$V=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta^3)\,d\theta=\frac{2a^3\pi}{3}-\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta^3\,d\theta.$$

Nach S. 342 d. I. T. ergiebt sich nun vermöge der Formel

$$4\sin\theta^3=3\sin\theta-\sin 3\theta$$

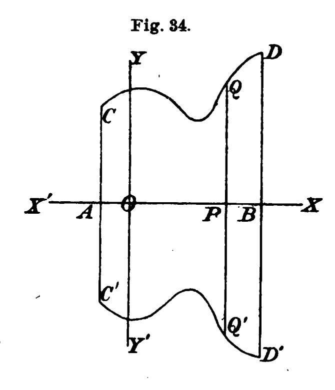
$$V=\frac{2a^3\pi}{3}-\frac{a^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 3\theta}{3}-3\cos\theta\right)=\frac{2a^3\pi}{3}-\frac{8a^3}{9}.$$

Somit ist $\frac{2a^3\pi}{3} - V = \frac{8a^3}{9}$, d. h. der Körper, welcher von der Halbkugel über und unter dem Halbkreise $B'AB$ nach Wegnahme des in Rede stehenden Cylinders übrig bleibt, hat ein rationales Verhältniss zu a^3 (Satz von Viviani). Sein vierter Theil ist das über der Fläche $OPAB$ stehende Stück jener Halbkugel.

7. Fortsetzung. Zone eines Umdrehungskörpers.

Denken wir uns in der xy-Ebene eine Curve CD (Fig. 34), welche von einer Parallelen zur y-Axe höchstens in einem Punkte geschnitten wird. Die Abscissen der Punkte C, D seien $OA = a$, $OB = b$ und die Gleichung der Curve $y = f(x)$, wobei $f(x)$ für alle Werthe von x im Intervalle (a, b) eindeutig und stetig sein soll. Lassen wir diese Curve eine volle Umdrehung um die x-Axe ausführen, so beschreibt ein jeder Punkt derselben einen Kreis, dessen Mittelpunkt seine Projection auf die x-Axe und dessen Radius seine Ordinate $f(x)$ ist. Die Coordinaten y, z aller Punkte der so entstandenen Umdrehungsfläche, welche die nämliche Abscisse $x = OP$ haben, erfüllen demnach die Gleichung

Fig. 34.



$$y^2 + z^2 = f(x)^2. \tag{10}$$

Wir wollen nun den Inhalt V des Körpers berechnen, welcher von dieser Umdrehungsfläche und den beiden, in A und B auf die Drehungsaxe senkrechten Ebenen begrenzt ist, was nach der Formel (2) geschehen kann. Das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ bildet das gemischtlinige Viereck $CC'D'D$, gebildet von den zwei zur x-Axe symmetrisch liegenden Curven CD und $C'D'$ und den Lothen CC', DD' auf diese Axe. Zu jedem Punkte xy desselben gehören zwei Punkte der Umdrehungsfläche, deren Applicaten nach (10) sind:

$$z = \sqrt{f(x)^2 - y^2} \qquad z' = -\sqrt{f(x)^2 - y^2}.$$

Somit ist

$$V = 2\int\!\!\int_{(\mathfrak{F})} \sqrt{f(x)^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Hier lässt sich eine Integration stets ausführen. Integriren wir nämlich zuerst nach y, so geht y von

$$PQ' = -f(x) \quad \text{bis} \quad PQ = f(x).$$

Wir finden also

$$V = 2\int_a^b dx \int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{f(x)^2 - y^2}\, dy,$$

somit nach der Formel (7)

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx. \tag{11}$$

Beispiele. 1) Ist $f(x)$ durchaus einer Constanten c gleich, so liefert die Formel (11) den Inhalt des geraden Cylinders von der

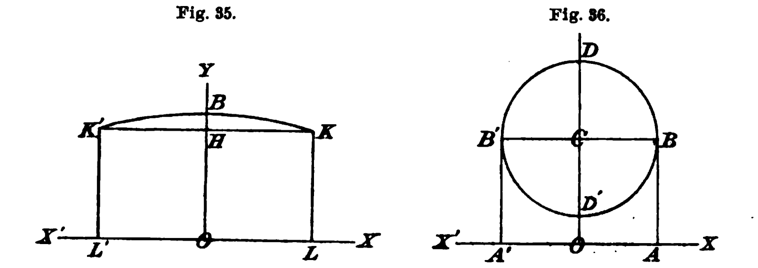


Fig. 35. Fig. 36.

Höhe $b-a$ und der Grundfläche $c^2\pi$. — Die Zonen der übrigen Umdrehungsflächen zweiter Ordnung erhalten wir schon aus den Formeln in 3) und 4) der vorigen Nummer, wenn wir daselbst $b = c$ setzen.

2) Lassen wir den von der y-Axe halbirten Bogen KK' (Fig. 35) der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a < b)$$

um ihre grosse Axe sich drehen, so entsteht ein fassförmiger Körper. Wenn wir die Abscissen der Punkte K, K'

$$OL = l \quad OL' = -l$$

und ihre Ordinaten

$$LK = L'K' = b\sqrt{1 - \frac{l^2}{a^2}} = k$$

setzen, so ist der Inhalt F dieses Körpers nach der Formel (11)

$$F = \pi\int_{-l}^{l}\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi\left(b^2 l - \frac{b^2 l^3}{3a^2}\right) = 2l\,\frac{2b^2 + k^2}{3}\,\pi.$$

Man kann also das Fass F als Cylinder berechnen, dessen Höhe $2l$ ist und dessen Grundfläche den Radius

$$\sqrt{\frac{2b^2+k^2}{3}}$$

hat. Wenn man aber bedenkt, dass die Krümmung des Fasses, $d = HB = b - k$, stets so klein ist, dass man schon ihr Quadrat vernachlässigen darf, so kann man zufolge der Formel

$$\sqrt{\frac{2b^2+k^2}{3}} = \sqrt{\frac{2b^2+(b-d)^2}{3}} = b\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{d}{b}+\frac{d^2}{3b^2}}$$
$$= b\left(1-\frac{d}{3b}+\cdots\right)$$

für $\sqrt{(2b^2+k^2):3}$

$$b-\frac{d}{3} = \frac{2b+k}{3}$$

setzen (Lambert'sche Näherungsformel).

3) Bei der Umdrehung eines Kreises (vom Radius a) um eine ihn nicht schneidende Axe in seiner Ebene entsteht eine wulstförmige Fläche vom Inhalt W. Machen wir die Drehungsaxe zur x-, die Senkrechte vom Mittelpunkte C des Kreises auf dieselbe zur y-Axe (Fig. 36) und setzen $OC = b$, so ist die Gleichung des Kreises

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2.$$

Ziehen wir den zur x-Axe parallelen Durchmesser BB' und die Lothe BA und $B'A'$ auf dieselbe, so finden wir nach der Formel (11) für den Inhalt des durch Drehung der Fläche $ABDB'A'$ um XX' erzeugten Körpers

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx.$$

Desgleichen ergiebt sich für den Inhalt des durch Drehung der Fläche $ABD'B'A'$ um XX' erzeugten Körpers

$$V' = \pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx.$$

Somit erhalten wir für den Wulst nach Formel (7)

$$W = V - V' = 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\pi b\cdot\frac{a^2\pi}{2} = 2a^2b\pi^2. \quad (12)$$

W ist also gleich dem Producte der sich drehenden Kreisfläche, $a^2\pi$, in den Weg ihres Mittelpunktes, $2b\pi$.

Wenn die Drehungsaxe XX' den Kreis (C, a) schneidet, so ist, wie man leicht finden wird, $2a^2b\pi^2$ gleich dem Unterschiede der absoluten Zahlen der Körper, welche durch Umdrehung der beiden Abschnitte, in die der Kreis durch die Drehungsaxe zerlegt wird, um dieselbe entstehen.

4) Wenn man die Fläche $\mathfrak{F}$ in Fig. 10 auf S. 82 eine volle Umdrehung um die x-Axe machen lässt, so erhält man auf ähnliche

Weise, wie W in 3) berechnet ist, für den Inhalt W des dadurch entstandenen Körpers $\pi \int_a^{a'} [\varphi_2(x)^2 - \varphi_1(x)^2]\, dx$. Dieses Integral ergiebt sich auch bei der Aufgabe, die Ordinate Y des Schwerpunktes der homogen mit Masse belegten ebenen Fläche $\mathfrak{F}$ zu bestimmen. Man hat nämlich bekanntlich

$$Y = \iint_{(\mathfrak{F})} y\, dx\, dy : \mathfrak{F}, \tag{13}$$

worin $\mathfrak{F}$ auch die Zahl der Fläche $\mathfrak{F}$ bedeutet. Führt man in diesem Doppelintegral zuerst die Integration nach y aus, so erhält man vermöge der Formel

$$\int y\, dy = \frac{1}{2} y^2 + \text{const.}$$

$$\iint_{(\mathfrak{F})} y\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_a^{a'} [\varphi_2(x)^2 - \varphi_1(x)^2]\, dx.$$

Somit hat man

$$Y = W : 2\pi\mathfrak{F} \quad \text{oder} \quad W = \mathfrak{F} \cdot 2\pi Y,$$

d. h. der Inhalt des durch Drehung der Fläche $\mathfrak{F}$ erzeugten Körpers ist gleich dem Producte der sich drehenden Fläche $\mathfrak{F}$ in den Weg ihres Schwerpunktes. (Guldin'sche Regel, welche natürlich die Kenntniss dieses Schwerpunktes voraussetzt.)

8. Inhalt eines Körpers, dessen einzige Oberfläche bestimmt ist durch die drei Gleichungen, welche die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben als Functionen zweier Parameter darstellen.

Die Coordinaten eines willkürlichen Punktes der einen Oberfläche $\mathfrak{O}$ des vorgelegten Körpers K seien dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(x, v) \quad z = \chi(u, v). \tag{1}$$

Und zwar soll dadurch, dass den Veränderlichen u, v ein geschlossenes endliches Gebiet Φ in der uv-Ebene angewiesen ist, der Punkt xyz die gesammte Oberfläche $\mathfrak{O}$ einmal beschreiben. Es soll also jedem Punkte u, v ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{O}$ und umgekehrt jedem Punkte von $\mathfrak{O}$ ein Punkt u, v und falls dieser innerhalb Φ liegt, nur dieser eine Punkt entsprechen.

Satz. „Es sei das Gebiet Φ in der uv-Ebene ganz im Endlichen und zwar zwischen den äussersten Abscissen $u = \alpha$ $u = \alpha'$ $(\alpha < \alpha')$ und den äussersten Ordinaten $v = \beta$

$v = \beta'$ $(\beta < \beta')$ gelegen. Theilt man die Strecken $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$ auf den Axen $v = 0$, $u = 0$ in beliebig viele Theile:

$$\alpha' - \alpha = d_1 + d_2 + \cdots + d_m, \quad \beta' - \beta = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \quad (2)$$

und zieht durch die Theilpunkte der ersteren, deren Abscissen

$$\alpha_1 = \alpha + d_1 \quad \alpha_2 = \alpha_1 + d_2 \ldots \alpha_{m-1} = \alpha_{m-2} + d_{m-1}$$

seien, die Parallelen zur v-Axe und durch die Theilpunkte der letzteren, deren Ordinaten

$$\beta_1 = \beta + e_1 \quad \beta_2 = \beta_1 + e_2 \ldots \quad \beta_{m-1} = \beta_{m-2} + e_{m-1}$$

seien, die Parallelen zur u-Axe, so wird die uv-Ebene mit einem Netz von Rechtecken $d_r e_s$ überzogen. Wir setzen

$$\varphi(\alpha_r, \beta_s) = x_{rs} \quad \psi(\alpha_r, \beta_s) = y_{rs} \quad \chi(\alpha_r, \beta_s) = z_{rs}$$

und nennen den Punkt von $\mathfrak{O}$ mit diesen Coordinaten $M_{r,s}$. Alsdann bilden wir die das Gesetz der Kanten erfüllende Summe von Tetraëdern mit dem Anfangspunkte O als der gemeinsamen Spitze

$$\sum (M_{r-1,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s-1} O + M_{r,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s} O) = W, \quad (3)$$

ausgedehnt über alle Rechtecke mit den Ecken

$$(\alpha_{r-1}, \beta_{s-1}) \quad (\alpha_{r-1}, \beta_s) \quad (\alpha_r, \beta_{s-1}) \quad (\alpha_r, \beta_s)$$

in der uv-Ebene, welche blos Punkte von Φ enthalten. (Man beachte, dass der zweite Punkt im ersten Gliede von (3) aus dem ersten $M_{r-1,s-1}$ durch Aenderung des zweiten Parameters v hervorgeht)."

„Wenn nun nicht allein die Functionen $\varphi(u,v), \psi(uv), \chi(u,v)$, sondern auch ihre partiellen Differentialquotienten erster Ordnung im Gebiete Φ mit Einschluss seiner Begrenzung stetig sind, so hat die vollständige Tetraëdersumme (3) bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme der

$$d_r (r = 1 \ldots m) \text{ und der } e_s (s = 1 \ldots n),$$

deren Summen jedoch bezw. $\alpha' - \alpha$ und $\beta' - \beta$ bleiben müssen, den Grenzwerth

$$\frac{1}{3} \iint \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv. \quad (4)$$

Er wird als Zahl V des von der Fläche $\mathfrak{O}$ begrenzten Körpers $\mathfrak{K}$ erklärt."

„Das Zeichen der Zahl V lässt sich auf folgende Art von vornherein bestimmen. Man greife die Grundfläche eines der in der Summe (3) vorkommenden Tetraëders, z. B. $M_{r,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s}$, heraus (natürlich unter Festhaltung der Anordnung der Ecken) und setze in ihrer Ebene den positiven Drehungssinn nach Belieben fest. Alsdann errichte man in einer der drei Ecken, z. B. in $M_{r,s}$, die Normale auf die Ebene und markire auf derselben einen Punkt N im Innern des Körpers $\mathfrak{K}$. Lässt man diejenige Richtung der Normalen, welche von den Füssen zum Kopfe eines in $M_{r,s}$ stehenden Beobachters läuft, der die positive Drehung in der Ebene $M_{r,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s}$ in der Richtung von rechts über vorne nach links vor sich gehen sieht, die positive sein, so stimmt das Zeichen von V mit dem des Productes $M_{r,s-1} M_{r-1,s} M_{rs} \times M_{rs} N$ überein."

Beweis. Wie schon auf S. 212 anlässlich eines besonderen Falles bemerkt ist, haben wir den Tetraëderinhalt

$$ABCO = ABC \cdot HO : 3 \tag{5}$$

zu setzen, wobei ABC und das Loth HO von O auf die Ebene ABC mit ihren Zeichen zu nehmen sind, und zwar die Strecke HO gemäss der in der Normale auf ABC nach dem Obigen zu wählenden positiven Richtung. $ABCO$ hat demnach das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem dem in O befindlichen Auge der Umlauf ABC von rechts über vorne nach links oder entgegengesetzt gerichtet erscheint.

Die Summe (3) erfüllt das Gesetz der Kanten[1]), d. h. es kommt in den Grundflächen der Tetraëder neben jeder Seite die entgegengesetzte vor, z. B. neben $M_{r-1,s} M_{r,s}$ die Seite $M_{r,s} M_{r-1,s}$ im Dreiecke $M_{r-1,s} M_{r-1,s+1} M_{r,s}$. Eine solche Summe von Tetraëdern wollen wir als vollständig bezeichnen. Nach einem bekannten Satze[2]) ändert sich die Summe (3) nicht, wenn man den Punkt O durch irgend einen anderen ersetzt. Auch wird man leicht finden, dass das Zeichen dieser Summe im Falle, dass die Grundflächen der darin vorkommenden

1) Vgl. Möbius, Werke II. S. 477.

2) Vgl. Möbius, Werke II. S. 494.

Tetraëder **ein** Polyeder umschliessen, durch die soeben angeführte Regel bestimmt wird.[1])

Nun müssen wir die Summe (3) durch die Coordinaten der Punkte $M_{r,s}$ ausdrücken. Betrachten wir überhaupt vier Punkte $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$, $M'''(x''', y''')$ der Fläche $\mathfrak{O}$, welche der Reihe nach den Werthsystemen

$$(u, v) \quad (u, v+e) \quad (u+d, v) \quad (u+d, v+e)$$

entsprechen mögen. Wir haben also

$$x' - x = \varphi(u, v+e) - \varphi(u, v) = e\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \sigma\right), \tag{6}$$

worin $\sigma = \varphi'_v(u, v+\eta e) - \varphi'_v(u, v)$ $(0 < \eta < 1)$

bei $\lim e = +0$

zum Grenzwerthe Null und zwar zufolge der Voraussetzung, dass $\varphi'_v(u, v)$ in allen Punkten des Gebietes Φ stetig ist, dafür **gleichmässig** convergirt.[2]) Ebenso können wir

$$x'' - x = \varphi(u+d, v) - \varphi(u, v) = d\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \varrho\right) \tag{7}$$

setzen, wobei ϱ bei $\lim d = 0$ gleichmässig für alle Punkte von Φ zum Grenzwerthe 0 convergirt. Das Nämliche gilt bezw. von den Funktionen P, Σ in den Formeln

$$x''' - x' = d\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \mathsf{P}\right) \quad x''' - x'' = e\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma\right). \tag{8}$$

Den Formeln (6)—(8) entsprechen ähnliche für die Differenzen der Ordinaten und Applicaten. — Bekanntlich[3]) besteht die Formel

$$MM'M''O = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x''-x, & y''-y, & z''-z \\ x'-x, & y'-y, & z'-z \end{vmatrix}. \tag{9}$$

---

1) Wenn es im Innern des Polyeders einen solchen Punkt giebt, dass die ihn mit den Ecken verbindenden Strecken nirgends aus dem Polyeder heraustreten, so ist die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar ersichtlich. Jedes andere einzellige Polyeder lässt sich aber in eine endliche Anzahl von Theilen zerlegen, welche die soeben erwähnte Beschaffenheit besitzen.

2) Vgl. I. T. S. 55 Satz 6).

3) Vgl. z. B. **Baltzer**, Determinanten § 15, 4 und die Note auf S. 207.

Hieraus ergiebt sich mittelst der Formeln (6), (7) und der ihnen entsprechenden für $y' - y$ u. s. f., dass, wenn man die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

mit $P(u, v)$ bezeichnet,

$$MM'M''O = \frac{1}{6}[P(u, v) + R(d, e)]\, de \tag{10}$$

ist. Dabei convergirt $R(d, e)$ bei $\lim d = 0$ $\lim e = 0$ gleichmässig für alle Punkte des Gebietes Φ zum Grenzwerthe Null, d. h. es lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, dass, wenn nur $|d| < \delta$, $|e| < \delta$ ist, alsdann stets $|R(d, e)| < \varepsilon$ ausfällt, mag uv was immer für ein Punkt des Gebietes Φ sein. Denn es ist $R(d, e)$ eine ganze Function der ϱ, σ u. s. w., welche kein davon unabhängiges Glied hat und dabei Coefficienten besitzt, die wegen der Stetigkeit der x, y, z und ihrer partiellen Differentialquotienten erster Ordnung nach u, v im ganzen Gebiete Φ für dasselbe endlich sind. Auf ähnliche Art findet man mit Hilfe der Formeln (8) und der entsprechenden für $y''' - y'$ u.s.w.

$$M''M'M'''O = \frac{1}{6}[P(u, v) + S(d, e)]\, de, \tag{11}$$

wobei $S(d, e)$ sich beim Grenzübergange $\lim d = 0$ $\lim e = 0$ ebenso verhält, wie $R(d, e)$. Durch Addition der Formeln (10) und (11) ergiebt sich dann, dass

$$MM'M''O + M''M'M'''O = \left[\frac{1}{3}P(u, v) + \frac{R(d, e) + S(d, e)}{6}\right] de \tag{12}$$

ist, wobei auch die Summe

$$T(uv, de) = \frac{1}{6}[R(d, e) + S(d, e)]$$

bei $\lim d = 0$ $\lim e = 0$ gleichmässig für alle Punkte des Gebietes Φ zum Grenzwerthe Null convergirt.

Lassen wir in (12) uv nach einander alle Werthsysteme α_{r-1}, β_{s-1}, wie sie denjenigen Rechtecken $d_r e_s$ in der uv-Ebene entsprechen, welche nur Punkte von Φ enthalten,

durchlaufen, wobei an Stelle von de bezw. $d_r e_s$ treten, setzen wir der Kürze wegen

$$T(\alpha_{r-1} \beta_{s-1}, d_r e_s) = T_{r-1, s-1},$$

und summiren über die genannten Rechtecke, so erhalten wir schliesslich

$$W = \frac{1}{3} \sum_{r,s} P(\alpha_{r-1}, \beta_{s-1}) d_r e_s + \sum_{r,s} T_{r-1, s-1} d_r e_s. \quad (13)$$

Dem oben Bemerkten zufolge lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, dass, wenn nur

$$d_r < \delta \quad (r = 1 \ldots m) \quad e_s < d \quad (s = 1 \ldots n) \quad (14)$$

ist, durchaus $| T_{r-1, s-1} | < \varepsilon$ ist. Dann ist aber

$$\Big| \sum_{r,s} T_{r-1, s-1} d_r e_s \Big| < \varepsilon \sum_{r,s} d_r e_s < \varepsilon (\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta).$$

$\varepsilon (\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta)$ kann jede positive Zahl ε' sein, folglich hat die zweite Summe auf der rechten Seite von (13) bei $\lim d_r = 0$ $(r = 1 \ldots m)$ $\lim e_s = 0$ $(s = 1 \ldots n)$ den Grenzwerth Null:

$$\lim_{d_r = 0 \; e_s = 0} \sum_{r,s} T_{r-1, s-1} d_r e_s = 0. \quad (15)$$

Die Function $P(u, v)$, welche im ganzen Gebiete Φ stetig ist, lässt ein Doppelintegral darüber zu. Wir finden daher

$$\lim_{d_r = 0 \; e_s = 0} \sum_{r,s} P(\alpha_{r-1}, \beta_{s-1}) d_r e_s = \iint_{(\Phi)} P(u, v) \, du \, dv \; (= J). \quad (16)$$

Aus (13), (15), (16) folgt endlich die Formel

$$\lim_{d_r = 0 \; e_s = 0} W = J : 3.$$

9. Ableitung der Cubaturformel in Nr. 8 aus der allgemeinen in Nr. 4 mit Hilfe des Green'schen Satzes für dreifache Integrale.

Die Cubaturformel der vorigen Nummer erhält ihre eigentliche Rechtfertigung erst dadurch, dass sie auf die allgemeine Formel für die Körperzahl in Nr. 4 zurückgeführt werden kann. Dies geschieht mit Hilfe des Green'schen Satzes für dreifache Integrale. Um denselben vollständig entwickeln zu können, müssen wir die Formeln für die

Richtungscosinus der inneren (oder äusseren) Normale n für die geschlossene Fläche $\mathfrak{O}$ mit den Gleichungen (1) auf S. 220

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v) \tag{1}$$

zur Hand haben. „In allen Punkten von $\mathfrak{O}$, wo von den drei Functionaldeterminanten

$$J(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$K(u, v) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$L(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

mindestens eine von Null verschieden ist, hat man, wenn die positive Zahl $\sqrt{J^2 + K^2 + L^2} = \varrho$ gesetzt wird,

$$\varrho \cos \widehat{xn} = J \quad \varrho \cos \widehat{yn} = K \quad \varrho \cos \widehat{zn} = L. \tag{17}$$

Dabei bedeutet der Halbstrahl n entweder für alle diese Punkte der Fläche $\mathfrak{O}$ die innere, d. h. nach dem Innern des von ihr begrenzten Körpers gehende Normale oder für alle die äussere.“[1])

1) Um die Formeln (17) zu erhalten, braucht man nur die Gleichung der tangirenden Ebene der Fläche $\mathfrak{O}$ im Punkte u, v aufzustellen. Und diese bekommt man, wenn man die Gleichung der diese Fläche schneidenden Ebene

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

worin X, Y, Z die laufenden Coordinaten, x, y, z u. s. w. die der Punkte M, M', M'' auf S. 223 bedeuten, durch $d \, . \, e$ dividirt und hierauf d und e unabhängig von einander zur Null convergiren lässt. Das Ergebniss ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dass dann die Richtung n in allen Punkten von $\mathfrak{O}$ die nämliche Seite der Flächennormale darstellt, ergiebt sich daraus, dass zugleich mit $J(u, v)$ (K, L) der Cosinus des Winkels der inneren Flächennormale mit der positiven x-Axe (y- bezw. z-Axe) sein Zeichen ändert.

Der Green'sche Satz für das dreifache Integral[1])

$$\mathsf{I} = \iiint_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

worin $\mathfrak{K}$ den Körper der vorigen Nummer und $f(x, y, z)$ eine eindeutige Function von x, y, z, die für denselben endlich und mindestens für jeden Punkt innerhalb desselben stetig ist, bedeutet, lautet: „Kennt man eine bei jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ mit Einschluss der Begrenzung eindeutige und stetige Function $F(x, y, z)$, deren partieller Differentialquotient nach x mindestens in den Punkten innerhalb $\mathfrak{K}$ gleich $f(x, y, z)$ ist und setzt man dx, dy, dz als positiv voraus, so hat man

$$\mathsf{I} = \iint_{(\Phi)} F(\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v))\, J(u, v)\, du\, dv. \tag{18}$$

Dabei sind die Zeichen von du, dv so zu nehmen, dass das Product $J(u, v)\, du\, dv$ positiv ausfällt, wenn u, v diejenigen Werthe annehmen, denen der grösste Werth der Abscisse x an der Oberfläche $\mathfrak{O}$ entspricht."

„Bei derselben Annahme über die Zeichen von $du\, dv$ hat man, wenn $G(x, y, z)$ eine in jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ stetige Function, deren partieller Differentialquotient nach y wenigstens in den Punkten innerhalb $\mathfrak{K}$ gleich $f(x, y, z)$ ist,

$$\mathsf{I} = \iint_{(\Phi)} G(\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v))\, K(u, v)\, du\, dv. \tag{19}$$

Und endlich ist, falls die in $\mathfrak{K}$ allenthalben stetige Function $H(x, y, z)$ wenigstens in jedem Punkte innerhalb $\mathfrak{K}$ $f(x, y, z)$ zum partiellen Differentialquotienten nach z hat,

$$\mathsf{I} = \iint_{(\Phi)} H(\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v))\, L(u, v)\, du\, dv.\text{"} \tag{20}$$

Diese Formeln lassen sich in ähnlicher Art beweisen wie die Formeln (c), (d) auf S. 96. Nehmen wir der Kürze halber an, dass die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von einer Parallelen zur x-Axe höchstens in zwei Punkten mit den Abscissen

1) Vgl. die Note auf S. 94.

$$x_1 = g_1(y, z) \qquad x_2 = g_2(y, z)$$

(wobei $x_1 < x_2$ sei) getroffen wird, so haben wir vermöge der Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y, z)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z)\,dx = F(x_2, y, z) - F(x_1, y, z),$$

somit, wenn unter $\mathfrak{F}$ die Projection der Oberfläche $\mathfrak{O}$ auf die yz-Ebene verstanden wird,

$$\mathrm{I} = \iint_{(\mathfrak{F})} F(x_2, y, z)\,dy\,dz - \iint_{(\mathfrak{F})} F(x_1, y, z)\,dy\,dz. \qquad (21)$$

In diese beiden Integrale führen wir anstatt y, z die Veränderlichen u, v durch die obigen Gleichungen

$$y = \psi(u, v) \qquad z = \chi(u, v)$$

ein. Der den letzteren angewiesene Bereich Φ lässt sich in zwei Theile Φ_1, Φ_2 zerlegen, deren jedem die Fläche $\mathfrak{F}$ eindeutig entspricht, und zwar hat die Determinante $J(u, v)$ in beiden entgegengesetztes Zeichen. Denn es wechselt J in den Punkten von $\mathfrak{O}$, wo die Normale zur x-Axe senkrecht steht, sein Zeichen. Ist Φ_2 diejenige Hälfte von $\mathfrak{O}$, wo die Abscisse x ihren grössten Werth erreicht, so haben wir

$$\iint_{(\mathfrak{F})} F(x_2, y, z)\,dy\,dz = \iint_{(\Phi_2)} F(\varphi, \psi, \chi)\,J(u, v)\,du\,dv.$$

Dabei ist zu merken, dass $J(u, v)\,du\,dv$, uv dem Gebiete Φ_2 entnommen, das nämliche Zeichen wie $dy\,dz$ haben, also positiv sein muss. Weil nun $J(u, v)$ für die u, v der Gebiete Φ_1 und Φ_2 entgegengesetztes Zeichen hat, so ist

$$\iint_{(\mathfrak{F})} F_1(x_1, y, z)\,dy\,dz = -\iint_{(\Phi_1)} F(\varphi, \psi, \chi)\,J(u, v)\,du\,dv$$

zu setzen. Mittelst der beiden letzten Formeln gelangen wir von der Gleichung (21) zu (18).

Auf ähnliche Weise erhält man die Formeln (19) und (20). Es ist nämlich, wenn n die innere Normale bezeichnet, auch $\cos \widehat{yn}$ in dem Punkte von $\mathfrak{O}$, wo die Ordinate y ihren

grössten Werth erreicht, und $\cos \widehat{zn}$, in dem, wo die Applicate z das thut, gleich -1.

Der vorstehende Satz lässt sich auf das Integral (I) auf S. 207 anwenden, wenn wir unter $\mathfrak{K}$ den in der vorigen Nummer eingeführten Körper verstehen. Da $f(x, y, z) = 1$ ist, so können wir

$$F(x, y, z) = x \qquad G(x, y, z) = y \qquad H(x, y, z) = z$$

setzen. Wir erhalten dadurch die Formeln

$$\mathsf{K} = \iint_{(\Phi)} x\, J(u, v)\, du\, dv$$

$$\mathsf{K} = \iint_{(\Phi)} y\, K(u, v)\, du\, dv$$

$$\mathsf{K} = \iint_{(\Phi)} z\, L(u, v)\, du\, dv.$$

Durch ihre Addition ergiebt sich für K der Ausdruck

$$\mathsf{K} = \frac{1}{3} \iint \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv. \tag{22}$$

Die in Nr. 8 eingeführte Körperzahl stimmt somit mit K überein.

10. Beispiele zur Cubaturformel in Nr. 8.

1) Das Ellipsoid. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird dadurch, dass man

$$x = a \cos\varphi \cos\psi \qquad y = b \sin\varphi \cos\psi \qquad z = c \sin\psi \tag{a}$$

setzt, identisch erfüllt. Die geometrische Bedeutung der Winkel φ und ψ wird auf folgende Weise gefunden. Die zu einem festen Werthe von φ gehörigen Punkte liegen in der Ebene

$$\frac{x}{a\cos\varphi} - \frac{y}{b\sin\varphi} = 0, \tag{b}$$

welche durch die z-Axe geht und die xy-Ebene längs der Geraden schneidet, deren Gleichung ebenfalls (b) ist. Sie hat also mit der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

den Punkt $x=a\cos\varphi\quad y=b\sin\varphi$ gemein; somit ist φ der excentrische Winkel für diese Ellipse (vgl. Fig. 14 auf S. 117). Um das ganze Ellipsoid zu erhalten, lassen wir φ von 0 bis 2π gehen. Setzt man

$$x^2+y^2=r^2,\quad a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2=m^2\quad (r>0\ m>0),$$

so ergiebt sich aus (a)

$$\frac{r^2}{m^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{c}$$

Die letzte Gleichung stellt den Schnitt des Ellipsoids mit der Ebene (b) dar. Beschränken wir ψ auf die Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$, so haben wir noch aus (a)

$$r=m\cos\psi\quad z=c\sin\psi;$$

ψ ist also der excentrische Winkel für die Hälfte der Ellipse (c) in der Halbebene (b).

Wir haben nun

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-a\sin\varphi\cos\psi\quad &&\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\ \ b\cos\varphi\cos\psi\quad &&\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0\\ &\frac{\partial x}{\partial\psi}=-a\cos\varphi\sin\psi\quad &&\frac{\partial y}{\partial\psi}=-b\sin\varphi\sin\psi\quad &&\frac{\partial z}{\partial\psi}=c\cos\psi,\end{aligned}\right\} \tag{c*}$$

somit

$$J(\varphi,\psi)=bc\cos\varphi\cos\psi^2,\quad K(\varphi,\psi)=ac\sin\varphi\cos\psi^2$$

$$L(\varphi,\psi)=ab\sin\psi\cos\psi$$

$$xJ+yK+zL=abc(\cos\psi^3+\sin\psi^2\cos\psi)=abc\cos\psi.$$

Der Inhalt K des Ellipsoids ist daher nach (22)

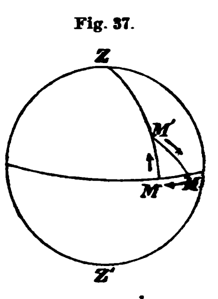
$$\mathsf{K}=\frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi=\frac{4abc\pi}{3}. \tag{d}$$

Wenn $a=b=c$ ist, so wird das Ellipsoid zur Kugel, φ,ψ zur Länge und Breite eines Punktes derselben im Sinne der Geographie. Dass der Kugelinhalt $4a^3\pi:3$ positiv ist, hat die folgende Bedeutung. Denken wir uns die positive Normale der Kugelfläche von derselben gegen den Mittelpunkt gerichtet, so muss nach S. 222 der Umlauf $MM'M''$, welche Punkte bez. den Werthsystemen φ,ψ; $\varphi,\psi+d\psi$; $\varphi+d\varphi,\psi$ entsprechen, von ihr aus positiv, folglich einem die Kugel von aussen betrachtenden Beobachter negativ erscheinen. Zufolge der Formeln (a) wächst φ, wenn sich der Punkt im positiven Sinne um den Punkt O dreht, und ψ, wenn er sich in der Halbebene (b) vom Durchschnitte mit der xy-Ebene gegen die positive z-Axe bewegt. Da nun im Integral (d) $d\varphi$ und $d\psi$ als positiv zu betrachten sind, so nehmen

die Punkte $M\,M'\,M''$ auf der Kugelfläche die in der Figur 37 dargestellte Lage ein; es erscheint demnach der Umlauf $M\,M'\,M''$ von aussen in der That als negativ.

2) Eine in der xy-Ebene befindliche geschlossene Linie $\mathfrak{l}$, welche die x-Axe nicht schneidet, wohl aber einzelne Punkte oder auch ganze Strecken mit ihr gemein haben kann, drehe sich um die x-Axe. Man sucht den Inhalt V des von ihr durch eine volle Umdrehung um diese Axe beschriebenen Körpers. — Die Gleichungen der Linie $\mathfrak{l}$ seien

Fig. 37.



$$x=\varphi(t) \quad y_0=\psi(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta),$$

wobei $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$ sein soll. Bei der erwähnten Drehung beschreibt der Punkt $N(x, y_0)$ von $\mathfrak{l}$ einen Kreis vom Radius y_0 um seine Projection P auf der x-Axe. Bezeichnen wir, unter M einen beliebigen Punkt dieses Kreises verstehend, den Winkel der gleichen Strecken PN und PM, gemessen im Sinne von OY zu OZ, mit θ und mit x, y, z die Coordinaten von M, so haben wir

$$x=\varphi(t) \quad y=\psi(t)\cos\theta \quad z=\psi(t)\sin\theta.$$

Daher ist

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial t}, & \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta}, & \frac{\partial y}{\partial \theta}, & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi, & \psi\cos\theta, & \psi\sin\theta \\ \frac{d\varphi}{dt}, & \frac{d\psi}{dt}\cos\theta, & \frac{d\psi}{dt}\sin\theta \\ 0, & -\psi\sin\theta, & \psi\cos\theta \end{vmatrix} = \varphi\psi\frac{d\psi}{dt}-\psi^2\frac{d\varphi}{dt}.$$

Und wir erhalten nach (22)

$$V=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \psi\left(\varphi\frac{d\psi}{dt}-\psi\frac{d\varphi}{dt}\right)dt\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \psi\left\{\varphi\frac{d\psi}{dt}-\psi\frac{d\psi}{dt}\right\}dt. \tag{e}$$

Die rechte Seite von (e) hängt mit der Ordinate Υ des Schwerpunktes der von der Linie $\mathfrak{l}$ begrenzten ebenen Fläche A zusammen. Bekanntlich haben wir

$$\mathsf{A}\,.\,\Upsilon=\iint_{(\mathsf{A})} y\,dx\,dy. \tag{f}$$

Nun ist nach dem Green'schen Satze auf S. 96, da

$$\frac{\partial(xy)}{\partial x}=y \quad \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dy}=y$$

ist, sowohl

$$\iint_{(\mathsf{A})} y\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta \varphi\psi\frac{d\psi}{dt}dt,$$

als auch

$$2\iint_{(\mathsf{A})} y\,dz\,dy=-\int_\alpha^\beta \psi^2\frac{d\varphi}{dt}dt.$$

Durch Addition dieser Gleichungen findet man

$$3\int\int_{(A)} y\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \psi\left(\varphi\frac{d\psi}{dt} - \psi\frac{d\varphi}{dt}\right)dt.$$

Somit ist nach (e) und (f)

$$V = \mathsf{A}\,.\,2\pi\Upsilon. \quad \text{(Guldin'sche Regel.)}$$

Man versuche zur Uebung aus der allgemeinen Formel (e) die Formel (11) auf S. 218 abzuleiten.

3) Endlich betrachten wir einen Körper, dessen Oberfläche von jedem in O entspringenden Halbstrahl in einem Punkte getroffen wird. Zur analytischen Darstellung derselben benutzen wir die räumlichen Polarcoordinaten: den Vector r $(\geqq O)$, den Winkel φ der positiven x-Axe mit der Projection des Vectors auf die xy-Ebene, im positiven Drehungssinne abzulesen, und den Winkel ψ dieser Projection mit dem Vector selbst, abzulesen in der Richtung von der Projection zur positiven z-Axe. Dabei geht φ von $-\pi$ bis π, ψ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$. Dann hat man für die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes

$$x = r\cos\varphi\cos\psi \quad y = r\sin\varphi\cos\psi \quad z = r\sin\psi. \tag{g}$$

In den Punkten der Oberfläche des Körpers erscheint r als eindeutige und stetige Function $f(\varphi, \psi)$ von φ und ψ, welche bez. die Intervalle $(0, 2\pi)$ und $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zu durchlaufen haben. Wir erhalten mithin seinen Inhalt V, in dem wir mittelst der Formeln (g), worin blos φ und ψ als unabhängige Veränderliche anzusehen sind, die Formel (22) ansetzen. Wir haben also

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial\varphi} &= \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\cos\psi \quad \text{u. s. w.}\\ \frac{\partial x}{\partial\psi} &= \frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\varphi\cos\psi - r\cos\varphi\sin\psi \quad \text{u. s. w.,}\end{aligned} \tag{h}$$

somit

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi}, & \frac{\partial y}{\partial\varphi}, & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\psi}, & \frac{\partial y}{\partial\psi}, & \frac{\partial z}{\partial\psi}\end{vmatrix} =$$

$$r\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi, & \sin\varphi\cos\psi, & \sin\psi \\ \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\cos\psi, & \frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\cos\psi, & \frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\psi \\ \frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\varphi\cos\psi - r\cos\varphi\sin\psi, & \frac{\partial r}{\partial\psi}\sin\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi, & \frac{\partial r}{\partial\psi}\sin\psi + r\cos\psi \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die erste Zeile mit $-\frac{\partial r}{\partial \varphi}$ und addirt sie zur zweiten, multiplicirt hierauf die erste Zeile mit $-\frac{\partial r}{\partial \psi}$ und addirt sie zur dritten und hebt schliesslich aus der 2. und 3. Zeile r heraus, so erhält man

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi}, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \psi}, & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = r^3 \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi, & \sin\varphi\cos\psi, & \sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi, & \cos\varphi\cos\psi, & 0 \\ -\cos\varphi\sin\psi, & -\sin\varphi\sin\psi, & \cos\psi \end{vmatrix} = r^3\cos\psi. \quad \text{(i)}$$

Demnach ergiebt sich[1])

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\psi \, d\psi. \quad \text{(k)}$$

11. Zahl eines Körpers im Euclid'schen Raume von m Dimensionen.

Ein endlicher stetiger Bereich von m Dimensionen in dem unbegrenzten Raume von eben so viel Dimensionen wird als Körper bezeichnet. Die Begrenzung desselben wird mittelst Ungleichungen angegeben. Ein Körper wird z. B. gebildet durch die Gesammtheit der Punkte mit den Coordinaten $X_1 X_2 \ldots X_m$, von welchen jede einem angegebenen Intervalle angehört, d. h. es soll sein

$$x_1 \leqq X_1 \leqq x_1 + dx_1, \quad x_2 \leqq X_2 \leqq x_2 + dx_2 \ldots x_m \leqq X_m \leqq x_m + dx_m. \quad (1)$$

In der Euclid'schen Raumform wird diesem Körper das vom Punkte $x_1 x_2 \ldots x_m$ unabhängige Product $dx_1 dx_2 \ldots dx_m$ als Zahl oder Inhalt beigelegt. Dem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$ ordnet man dann als Inhalt das m-fache Integral

$$S_{(\mathfrak{K})}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m, \quad (2)$$

ausgedehnt über die gesammte Begrenzung desselben, zu; was mit der Annahme der Zahl für den Körper (1) übereinstimmt und im Falle $m = 3$ der in Nr. 4 getroffenen Festsetzung entspricht.

Um ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir den Inhalt V des Körpers berechnen, welcher von der Gesammtheit aller Punkte gebildet wird, deren Coordinate keine negativen Werthe annehmen und dabei unter der Voraussetzung, dass $a_1 a_2 \ldots a_m$ positive Zahlen sind, der Beziehung

1) Vgl. Gauss, Werke V. S. 10. Theorema IV.

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_m}{a_m}\leqq 1$$

genügen. Für den Fall $m=3$ wurde auf S. 212 $V=a_1\,a_2\,a_3:6$ gefunden.

Allgemein hat man

$$V=a_1\,a_2\ldots a_m:m!, \tag{3}$$

was leicht durch den Schluss von $m-1$ auf m gezeigt werden kann. Wir haben nämlich, wenn wir zuerst nach $x_1\ldots x_{m-1}$ und dann nach x_m integriren,

$$V=\int_0^{a_m}dx_m\,S\,dx_1\ldots dx_{m-1},$$

wobei das $(m-1)$fache Integral über alle nichtnegativen Werthe von $x_1\ldots x_{m-1}$ ausgedehnt ist, wofür

$$\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{a_{m-1}}\leqq 1-\frac{x_m}{a_m},\quad \text{d.i.}\quad \left(\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{a_{m-1}}\right):\left(1-\frac{x_m}{a_m}\right)\leqq 1$$

ist. Wenn wir nun voraussetzen, dass die Formel (3) im Falle, dass m durch $m-1$ ersetzt wird, bei willkürlichen positiven Werthen der $a_1\ldots a_{m-1}$ Geltung besitze, so erhalten wir

$$S\,dx_1\ldots dx_{m-1}=\left(1-\frac{x_m}{a_m}\right)^{m-1}a_1\ldots a_{m-1}:(m-1)!.$$

Somit ergiebt sich, dass

$$V=\frac{a_1\ldots a_{m-1}}{(m-1)!}\int_0^{a_m}\left(1-\frac{x_m}{a_m}\right)^{m-1}dx_m$$

ist. Es ist aber

$$\int_0^{a_m}\left(1-\frac{x_m}{a_m}\right)^{m-1}dx_m=\Big|_0^{a_m}-\frac{a_m}{m}\left(1-\frac{x_m}{a_m}\right)^m=\frac{a_m}{m},$$

wodurch wir schliesslich zur Formel (3) gelangen.

Die Complanation der krummen Flächen.

12. Vorbemerkung zur Erklärung der Zahl einer krummen Fläche.

In früherer Zeit wurde diese Zahl auf folgende Weise erklärt. Wenn man der gegebenen Fläche eine unbegrenzte Schaar von Polyedern mit den Oberflächen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_m\ldots$ in der Art einschreibt, dass bei $\lim m=+\infty$ jede Polyederfläche zur Null convergirt und die äussere Begrenzung der Polyeder in die Begrenzung der gegebenen Fläche übergeht, so ist der Grenzwerth von $\mathfrak{F}_m$ bei $\lim m=+\infty$ die Zahl dieser Fläche. Allein diese Erklärung erweist sich als verfehlt, weil der genannte Grenzwerth im Allgemeinen von der

Wahl der eingeschriebenen Polyeder abhängt. H. A. Schwarz, von dem diese Bemerkung herrührt, hat sie an der Mantelfläche des geraden Kreiscylinders begründet.[1]) Dieses Beispiel wollen wir zunächst vorführen, wobei wir erfahren werden, welche Einschränkung in die obige Erklärung der Flächenzahl aufzunehmen ist.

Der gerade Cylinder habe zur Grundfläche einen Kreis vom Radius a und die Höhe h. Machen wir den Mittelpunkt dieses Kreises zum Anfangspunkt der Coordinaten und seine Ebene zur xy-Ebene, so haben die Punkte der Cylinderfläche die Coordinaten

$$x = a\cos u \qquad y = b\sin u \qquad z = v, \tag{1}$$

wobei u alle Werthe von 0 bis 2π, v alle von 0 bis h durchläuft. Diesem Cylinder schreiben wir ein Polyeder mit $4mn$ Seitenflächen, welche sämmtlich unter einander congruente Dreiecke sind, in folgender Art ein. Wir theilen die Höhe h in $2n$ gleiche Theile. Dann sind die geraden Theilpunkte mit Einschluss des Anfangs- und Endpunktes der Höhe durch die Applicaten

$$z_{2\sigma} = \frac{\sigma h}{n} \quad (\sigma = 0, 1 \ldots n), \tag{2}$$

die ungeraden durch die Applicaten

$$z_{2\sigma+1} = \frac{(2\sigma+1)h}{2n} \quad (\sigma = 0, 1 \ldots n-1) \tag{3}$$

bestimmt. Durch jeden von diesen Theilpunkten legen wir eine Ebene parallel zur Grundfläche des Cylinders, welche seinen Mantel längs eines Kreises vom Radius a schneidet. Der Grundfläche des Cylinders schreiben wir ein reguläres Vieleck von $2m$ Seiten ein, dessen Eckpunkte die Coordinaten

$$x_r = a\cos\frac{r\pi}{m} \qquad y_r = a\sin\frac{r\pi}{m} \quad (r = 0, 1 \ldots 2m-1) \tag{4}$$

besitzen. In jedem von ihnen ziehen wir die Seite des Cylinders, d. i. die Senkrechte, auf seine Grundfläche und

---

1) Vgl. H. A. Schwarz, Werke II. S. 309 u. 369. G. Peano hat zufolge einer Note in den Rendiconti dell'acc. dei Lincei (4. ser. Vol. VI. S. 55) die in Rede stehende Bemerkung etwas früher als Schwarz veröffentlicht.

fixiren in den zu den Applicaten (2) gehörigen Kreisen die Punkte, welche auf den Senkrechten über den Punkten

$$x_{2\varrho},\ y_{2\varrho} \quad (\varrho = 0,\ 1 \ldots m-1)$$

liegen, in den zu den Applicaten (3) gehörigen Kreisen die, welche auf den Senkrechten über den Punkten

$$x_{2\varrho+1},\ y_{2\varrho+1} \quad (\varrho = 0,\ 1 \ldots m-1)$$

liegen. Auf diese Art erhalten wir auf jedem der genannten Kreise m Punkte, welche ein reguläres m-Eck bilden. Dabei sind die Vielecke in den Ebenen $z = z_{2\sigma+1}$ gegenüber denen in den Ebenen $z = z_{2\sigma}$ um den Winkel $\pi : m$ gedreht. Jeder von den $(2n+1)m$ construirten Punkten ist durch zwei Nummern s, r, welche in seinen Coordinaten x_r, y_r, z_s als Indices erscheinen, charakterisirt. (In Fig. 38 sind die in der Grundfläche und den Ebenen $z = h : 2n$, $h : n$, $3h : 2n$, $2h : n$ angenommenen Punkte angedeutet, wobei $m = 6$ gesetzt ist.) Nun wird im Kreise, welcher die Höhe

$$(2\sigma + 1)h : 2n$$

über der Grundfläche hat, ein jeder Punkt mit den beiden ihm zunächst gelegenen der Schnitte in den Höhen

$$\sigma h : n \quad \text{und} \quad (\sigma+1)h : n$$

verbunden und so dem Cylinder $4m$ Dreiecke eingeschrieben. Ist das für alle Werthe $\sigma = 0, 1 \ldots n-1$ gemacht, so haben wir $4mn$ gleichschenklige Dreiecke construirt, die einander congruent sind, weil sowohl ihre Grundlinien, als auch ihre Schenkel sämmtlich die gleiche Länge haben. Es ist, wenn wir unter $MM'M''M'''$ (Fig. 39) nach einander die Punkte

$$(s, r),\ (s, r+1),\ (s, r+2) \quad \text{und} \quad (s+1, r+1)$$

(wovon der zweite nicht zu den oben bezeichneten Punkten gehört) verstehen, die Gerade $M'M'''$ als Cylinderseite senkrecht auf der Ebene des Kreises $MM'M''$, somit

$MM''' = M''M'''$ und ferner $MM'''^2 = MM'^2 + M'M'''^2$.

MM' als Seite des regulären $2m$-Ecks im Kreise $MM'M''$ ist gleich $2a \sin(\pi : 2m)$ und $M'M'''$ ist gleich $h : 2n$. Wir erhalten daher

$$MM'''^2 = 4a^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2 + \frac{h^2}{4n^2}.$$

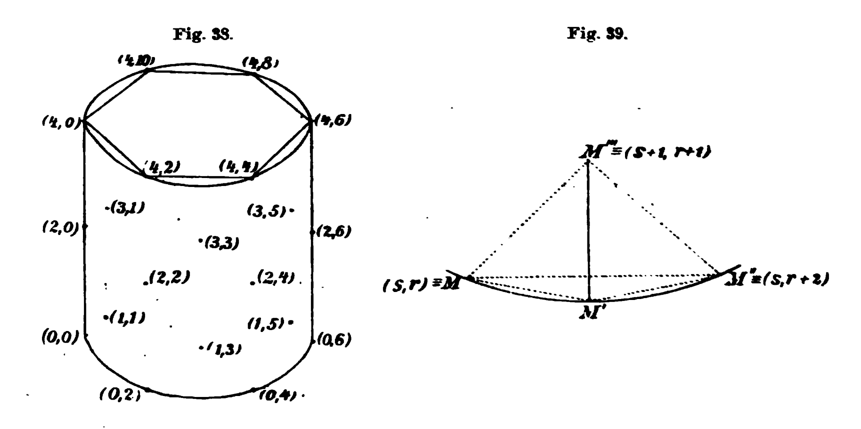
MM'' ist als Seite des regulären m-Ecks im Kreise $MM'M'''$ gleich $2a\sin(\pi:m)$; also ist das Quadrat des vom Punkte M''' auf die Basis MM'' gefällten Lothes

$$\left[4a^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2+\frac{h^2}{4n^2}\right]-a^2\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2=4a^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4+\frac{h^2}{4n^2}.$$

Daraus ergiebt sich für den Inhalt des Dreiecks $MM''M'''$

$$a\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{4a^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4+\frac{h^2}{4n^2}}. \tag{5}$$

Fig. 38. Fig. 39.



Der Inhalt aller $4mn$ dem Cylinder eingeschriebenen Dreiecke, sämmtlich congruent dem Dreiecke $MM''M'''$, beträgt demnach

$$\mathfrak{F}(m,n)=2ma\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{a^2n^2\left(2\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4+h^2}. \tag{6}$$

Setzt man hier $n=km$, unter k eine feste natürliche Zahl verstanden, so findet man

$$\mathfrak{F}(m,km)=2\pi a\left(\frac{m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}\right)\sqrt{\frac{a^2k^2\pi^4}{m^2}\left(\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4+h^2}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Formel

$$\lim_{\xi=0}\{\sin\xi:\xi\}=1$$

sofort, dass

$$\lim_{m=+\infty}\mathfrak{F}(m,km)=2\pi ah \tag{7}$$

ist. — Setzt man aber in (6) $n=km^2$, so erhält man

$$\mathfrak{F}(m, km^2) = 2\pi a \left(\frac{m}{\pi} \text{ ein } \frac{\pi}{m}\right) \sqrt{a^2k^2\pi^4\left(\frac{2m}{\pi} \sin \frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2},$$

somit ist

$$\lim_{m=+\infty} \mathfrak{F}(m, km^2) = 2\pi a \sqrt{a^2k^2\pi^4 + h^2}. \tag{8}$$

Setzt man endlich in (6) $n = km^3$, bildet also

$$\mathfrak{F}(m, km^3) = 2\pi a \left(\frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}\right) \sqrt{a^2k^2\pi^4m^2\left(\frac{m}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2},$$

so findet man

$$\lim_{m=+\infty} \mathfrak{F}(m, km^3) = +\infty. \tag{9}$$

Die Formel (7) giebt den aus der Stereometrie bekannten Inhalt der Mantelfläche unseres Cylinders, die rechte Seite der Formel (8) bietet unzählig viele Werthe, sämmtlich grösser als $2\pi a h$, dar; bei der dritten Annahme von n erhalten wir sogar einen unendlichen Grenzwerth.

Wir brauchen nun nicht lange nach einem Grunde zu suchen, welcher uns veranlasst, die Ergebnisse (8), (9) für die Mantelfläche des geraden Cylinders abzulehnen. Berechnen wir nämlich den Winkel zwischen der tangirenden Ebene des Cylinders im Punkte M und der Ebene $MM''M'''$, d. i. den Winkel der beiderseitigen Normalen, so finden wir, dass derselbe nur bei der Substitution $n = km$ für $\lim m = +\infty$, während der Punkt M zu einer bestimmten Grenzlage auf dem Cylinder übergeht, zur Null convergirt. Wir haben demnach in die Eingangs der Nummer angeführte Erklärung der Flächenzahl noch die Bedingung aufzunehmen, dass j e d e S e i t e n f l ä c h e d e s d e r F l ä c h e e i n g e s c h r i e b e n e n P o l y e d e r s b e i m G r e n z ü b e r g a n g e $\lim m = +\infty$ z u r t a n g i r e n d e n E b e n e d e r F l ä c h e i n j e n e m P u n k t e, w e l c h e r d i e G r e n z l a g e f ü r e i n e E c k e j e n e r S e i t e n f l ä c h e b i l d e t, w e r d e n s o l l.

Um die soeben erwähnte Rechnung auszuführen, bemerken wir, dass die Normale der Cylinderfläche im Punkte $M \equiv (s, r)$ (Fig. 39) der durch diesen Punkt gehende Radius des Kreises $MM'M''$ ist.

Bezeichnen wir die nach aussen weisende Richtung in demselben mit $\mathfrak{r}$, so haben wir $\widehat{x\mathfrak{r}} = r\pi : m$, $\widehat{y\mathfrak{r}} = r\pi : m - \frac{\pi}{2}$, $\widehat{z\mathfrak{r}} = \pm\frac{\pi}{2}$. Die Gleichung der Ebene durch die Punkte $MM'M''$ mit den Coordinaten

$$x_1 = a \cos (r\pi : m) \qquad y_1 = a \sin (r\pi : m) \qquad z_1 = sh : 2n$$
$$x_2 = a \cos ([r+2]\pi : m) \quad y_2 = a \sin ([r+2]\pi : m) \quad z_2 = sh : 2n$$
$$x_3 = a \cos ([r+1]\pi : m) \quad y_3 = a \sin ([r+1]\pi : m) \quad z_3 = (s+1)h : 2n$$

lautet

$$h \cos \frac{(r+1)\pi}{m} \cdot x + h \sin \frac{(r+1)\pi}{m} \cdot y - 4na \left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2 z$$
$$+ ah \left[2s \left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2 - \cos \frac{\pi}{m}\right] = 0.$$

Wir haben also, wenn p eine darauf senkrechte Richtung bedeutet und

$$W = \sqrt{a^2 n^2 \left(2 \sin \frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2}$$

ist,

$$W . \cos \widehat{x\mathrm{p}} = h \cos \frac{(r+1)\pi}{m} \qquad W . \cos \widehat{y\mathrm{p}} = h \sin \frac{(r+1)\pi}{m}$$
$$W . \cos \widehat{z\mathrm{p}} = -4na \left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2.$$

Mithin ist

$$\cos \widehat{\mathrm{rp}} = \cos \widehat{x\mathrm{r}} \cos \widehat{x\mathrm{p}} + \cos \widehat{y\mathrm{r}} \cos \widehat{y\mathrm{p}} + \cos \widehat{z\mathrm{r}} \cos \widehat{z\mathrm{p}}$$
$$= h \cos \frac{\pi}{m} : \sqrt{a^2 n^2 \left(2 \sin \frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2}.$$

Den Ausdruck rechts, welcher natürlich von r und s unabhängig sein muss, hat bei $\lim m = +\infty$ im Falle, dass $n = km$ ist, den Grenzwerth 1, im Falle, dass $n = km^2$, den Grenzwerth $h : \sqrt{a^2 k^2 \pi^4 + h^2}$, welcher kleiner als 1 ist, endlich im Falle, dass $n = km^3$, den Grenzwerth Null. Also geht die Ebene $MM''M'''$ nur im ersten Falle bei $\lim m = +\infty$ in die tangirende Ebene des Cylinders an jenem Punkte über, welcher die Grenzlage des Punktes $M(x_1, y_1, z_1)$ bildet. Eine solche ist vorhanden, wenn die Brüche $r : m$ und $s : km$ unter der Voraussetzung, dass r und s von m abhängen, bei $\lim m = +\infty$ je einen bestimmten Grenzwerth besitzen.

13. Allgemeine Formel für den Inhalt einer krummen Fläche.

Satz.[1]) „Die vorgelegte Fläche sei wie in Nr. 8 vermittelst zweier Parameter u, v durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v) \tag{1}$$

dargestellt. Es sei ferner in der uv-Ebene ein geschlossenes endliches Gebiet Φ gegeben, für dessen jeden Punkt die

---

1) Denselben Satz findet man bei Ch. Méray, Nouvelles leçons sur l'Analyse infinitésimale, T. IV. S. 29, nur sind daselbst die Functionen φ, ψ, χ im ganzen Gebiete Φ als holomorph vorausgesetzt.

Functionen φ, ψ, χ eindeutig, endlich und stetig seien. Ausserdem sollen dafür die partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung von φ, ψ, χ nach u und v stetig und von den Determinanten

$$J=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\quad K=\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\quad L=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\tag{2}$$

mindestens eine von Null verschieden sein."

„Ueberzieht man alsdann wie auf S. 221 das Gebiet Φ mit Rechtecken $d_r e_s$, deren Seiten paarweise der u- und der v-Axe parallel sind, so hat die Summe der windschiefen Vierecke

$$\left.\begin{array}{r}|M_{r-1,s-1}M_{r-1,s}M_{r,s-1}M_{r,s}|=|M_{r-1,s-1}M_{r-1,s}M_{r,s-1}|\\ +|M_{r,s-1}M_{r-1,s}M_{r,s}|,\end{array}\right\}\tag{3}$$

ausgedehnt über alle Rechtecke mit den Ecken

$$(\alpha_{r-1},\ \beta_{s-1})\quad(\alpha_{r-1},\ \beta_s)\quad(\alpha_r,\ \beta_{s-1})\quad(\alpha_r,\ \beta_s),$$

welche blos Punkte von Φ enthalten, bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme der Theile

$$d_r(r=1\ldots m)\quad\text{und}\quad e_s(s=1\ldots n),$$

deren Summe jedoch bezw. $\alpha'-\alpha$ und $\beta'-\beta$ bleiben müssen, den Grenzwerth

$$\iint_{(\Phi)}\sqrt{J^2+K^2+L^2}\,du\,dv,\tag{4}$$

wobei du, dv, d. i. $\alpha'-\alpha$ und $\beta'-\beta$, als positiv vorausgesetzt sind. Er wird als die Zahl oder der Inhalt A des mittelst des Gebietes Φ bestimmten Stückes der Fläche (1), welches indess auch in sich geschlossen sein kann, erklärt."

Mit Benutzung der von Gauss eingeführten Ausdrücke

$$E=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2\quad G=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}$$

kann man

$$J^2+K^2+L^2=EG-F^2\tag{5}$$

setzen.

Beweis. Wir verstehen wie auf S. 223 unter $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$, $M'''(x''', y''')$ die Punkte der Fläche (1), welche der Reihe nach den Werthsystemen (u, v), $(u, v+e)$, $(u+d, v)$, $(u+d, v+d)$ entsprechen. Bemerken wir dann, dass nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie

$$4\,MM'M''^2 = \begin{vmatrix} y'-y, & z'-z \\ y''-y, & z''-z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'-z, & x'-x \\ z''-z, & x''-x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'-x, & y'-y \\ x''-x, & y''-y \end{vmatrix}^2$$

ist. Mit Hilfe der Formeln (7) a. a. O. und der analogen für die Differenzen $y'-y$, $y''-y$, $z'-z$, $z''-z$ ergeben sich Formeln von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} y'-y, & z'-z \\ y''-y, & z''-z \end{vmatrix} &= d\,.\,e\,[J + J_1(d, e)] \\ \begin{vmatrix} z'-z, & x'-x \\ z''-z, & x''-x \end{vmatrix} &= d\,.\,e\,[K + K_1(d, e)] \\ \begin{vmatrix} x'-x, & y'-y \\ x''-x, & y''-y \end{vmatrix} &= d\,.\,e\,[L + L_1(d, e)], \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wobei die Ausdrücke J_1, K_1, L_1 zugleich mit d und e zum Grenzwerthe Null convergiren. Allein nicht blos dies, sie convergiren dazu obendrein gleichmässig für alle Punkte des Gebietes Φ. Der Grund davon ist der nämliche, weswegen die Function $R(d, e)$ auf S. 224 dasselbe Verhalten zeigt. Aus den letzten Formeln ergiebt sich dann eine von der Gestalt

$$2\,|\,MM'M''\,| = d\,.\,e\sqrt{J^2 + K^2 + L^2 + P(d, e)},$$

welche wir auf die Form bringen

$$2\,|\,MM'M''\,| = d\,.\,e\,[\sqrt{J^2 + K^2 + L^2} + Q(d, e)]. \qquad (7)$$

Demnach ist

$$\left.\begin{aligned} Q(d, e) &= \sqrt{J^2 + K^2 + L^2 + P} - \sqrt{J^2 + K^2 + L^2} \\ &= \frac{P}{\sqrt{J^2 + K^2 + L^2} + \sqrt{J^2 + K^2 + L^2 + P}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Hieraus folgt, dass auch $Q(d, e)$ bei $\lim d = 0$ $\lim e = 0$ gleichmässig für alle Punkte des Gebietes Φ zur

Null convergirt. Da nämlich $\sqrt{J^2+K^2+L^2}$ für keinen von ihnen verschwindet, so muss diese Wurzel bei ihrer Stetigkeit im ganzen Gebiete Φ darin ein von Null verschiedenes Minimum Γ besitzen. Weiter wissen wir, dass jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so entspricht, dass, wenn nur $d < \delta$, $e < \delta$ ist, alsdann $|P(d, e)| < \varepsilon$ ist, mag u, v was immer für ein Punkt von Φ sein. Demnach ergiebt sich aus (8), dass unter derselben Voraussetzung

$$|Q(d, e)| < \varepsilon : (2\Gamma - \varepsilon : \Gamma) \tag{8*}$$

ist (s. Nachträge zum III. T.), woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung über $Q(d, e)$ erhellt.

Auf ähnliche Art wie die Formel (8) erhält man die weitere:

$$2\,|M'M'M'''| = d.e\,[\sqrt{J^2+K^2+L^2} + Q'(d, e)], \tag{9}$$

und zwar gilt von $Q'(d, e)$ das Nämliche, wie von $Q(d, e)$. Wir finden also schliesslich

$$\left.\begin{aligned} |MM'M''M'''| &= |MM'M''| + |M''M'M'''| \\ &= d\,.\,e\left[\sqrt{J^2+K^2+L^2} + \frac{Q(d, e)+Q'(d, e)}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die vorstehende Formel haben wir auf die windschiefen Vierecke (3) anzuwenden und hierauf ihre Summe zu bilden. Bezeichnen wir die durch die Substitution $u = \alpha_{r-1}$ $v = \beta_{s-1}$ $d = d_r$ $e = e_s$ aus J, K, L, $(Q + Q') : 2$ hervorgehenden Werthe bezw. mit $J_{r-1,s-1}$, $K_{r-1,s-1}$, $L_{r-1,s-1}$, $\Omega_{r-1,s-1}$, so erscheint die Summe

$$\sum_{r,s}\sqrt{J^2_{r-1,s-1}+K^2_{r-1,s-1}+L^2_{r-1,s-1}}\,d_r e_s + \sum_{r,s}\Omega_{r-1,s-1}\,d_r e_s, \tag{11}$$

ausgedehnt über alle Rechtecke $d_r e_s$, welche keinen Aussenpunkt von Φ enthalten. Da nun jedem $\varkappa > 0$ ein $\lambda > 0$ so entspricht, dass $|\Omega_{r-1,s-1}| < \varkappa$ ist, wenn nur jedes δ_r und jedes ε_s kleiner als λ ist, so ist unter denselben Umständen

$$\left|\sum\Omega_{r-1,s-1}d_r e_s\right| < \varkappa\,(\alpha' - \alpha)\,(\beta' - \beta).$$

Der zweite Theil von (11) hat somit bei

$\lim d_r = 0 \quad (r = 1 \ldots m)$ und $\lim \varepsilon_s = 0 \quad (s = 1 \ldots n)$ den Grenzwerth Null. Der erste Theil von (11) aber hat wegen der Stetigkeit der Function $\sqrt{J^2 + K^2 + L^2}$ bei allen Punkten von Φ den Grenzwerth

$$\iint_{(\Phi)} \sqrt{J^2 + K^2 + L^2}\, du\, dv.$$

Dieses Doppelintegral ist also auch der Grenzwerth der Flächensumme (11) bei $\lim d_r = 0$ $\lim e_s = 0$, w. z. b. w.

14. Fortsetzung. Zur Rechtfertigung der soeben aufgestellten Erklärung der Flächenzahl A sei zunächst bemerkt, dass die Ebene $M_{r-1,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s-1}$ bei $\lim d_r = 0$ $e_s = 0$ die tangirende Ebene unserer Fläche in jenem Punkte, in welchen dabei der Punkt $M_{r-1,s-1}$ übergeht, zur Grenze hat. Man braucht, um das einzusehen, nur den Cosinus des Winkels der Senkrechten auf die Ebene

$$M_{r-1,s-1} M_{r-1,s} M_{r,s-1}$$

mit der Normale der Fläche (1) im Punkte $M_{r-1,s-1}$ anzuschreiben.

Wir stellen ferner fest, dass das Oberflächenintegral (4) seine Form dadurch nicht ändert, dass an Stelle der Parameter u, v zwei andere u', v' treten. Es seien also

$$u = f(u', v') \qquad v = g(u', v') \tag{12}$$

gesetzt, und zwar so, dass, während die neuen Veränderlichen u', v' ein endliches Gebiet Φ' in der $u'v'$-Ebene erfüllen, alsdann die alten, uv, das Gebiet Φ einmal liefern. Die Functionen $f(u', v')$, $g(u', v')$ seien im Gebiete Φ' eindeutig und stetig und mit ebensolchen Differentialquotienten erster Ordnung begabt. Die Gleichungen (12) sollen sich also eindeutig nach u', v' umkehren lassen und zwar seien auch für diese Umkehrungen endliche und stetige Differentialquotienten erster Ordnung nach u, v vorhanden. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

u. s. w. Bezeichnen wir die den Ausdrücken EFG entsprechenden mit $E'F'G'$, d. h. setzen wir

$$E' = \left(\frac{\partial x}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u'}\right)^2$$

u. s. w., so ergiebt sich zufolge der Formeln (13)

$$E = E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2. \qquad (14)$$

Führen wir nun die linearen Functionen

$$C = E'\frac{\partial u'}{\partial u} + F'\frac{\partial v'}{\partial u} \qquad D = F'\frac{\partial u'}{\partial u} + G'\frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$C' = E'\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\frac{\partial v'}{\partial v} \qquad D' = F'\frac{\partial u'}{\partial v} + G'\frac{\partial v'}{\partial v}$$

ein, so finden wir nach (14)

$$E = C\frac{\partial u'}{\partial u} + D\frac{\partial v'}{\partial u}$$

und auf ähnliche Weise

$$F = C\frac{\partial u'}{\partial v} + D\frac{\partial v'}{\partial v} = C'\frac{\partial u'}{\partial u} + D'\frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$G = C'\frac{\partial u'}{\partial v} + D'\frac{\partial v'}{\partial v}.$$

Sonach ist

$$\begin{vmatrix} E, & F \\ F, & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C, & D \\ C', & D' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial v}, & \frac{\partial v'}{\partial u} \\ \frac{\partial u'}{\partial v}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E', & F' \\ F', & G' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial v'}{\partial u} \\ \frac{\partial u'}{\partial v}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \qquad (15)$$

und

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{E'G' - F'^2}\left|\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right|. \qquad (16)$$

Die Functionaldeterminante der Substitution (12) ist der reciproke Werth der Determinante

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}.$$

In der That ergeben sich durch Differenzirung der Gleichungen (12) nach u und v die Formeln

$$1 = \frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial f}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u} \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u} \qquad 1 = \frac{\partial g}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

und daraus die Beziehung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u'}, & \frac{\partial f}{\partial v'} \\ \frac{\partial g}{\partial u'}, & \frac{\partial g}{\partial v'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial v'}{\partial u} \\ \frac{\partial u'}{\partial v}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = 1. \qquad (17)$$

Bezeichnen wir die erste von diesen Determinanten mit $J(u', v')$, die zweite mit $J'(u, v)$, so geht der Ausdruck (4) für A durch die Substitution (12) nach XVII. 12 zufolge der Formel (16) über in

$$\mathsf{A} = \iota \int\!\!\int_{(\Phi')} \sqrt{E'G' - F'^2}\,|J'|\,J du' dv'.$$

Wählt man auch du' und dv' positiv, so bedeutet ι 1 mit dem Vorzeichen von $J(u', v')$. Wir erhalten somit schliesslich mit Rücksicht auf die Formel (17)

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A} &= \int\!\!\int_{(\Phi')} \sqrt{E'G' - F'^2}\,|J'J|\,du' dv' \\ &= \int\!\!\int_{(\Phi')} \sqrt{E'G' - F'^2} du' dv'. \end{aligned}\right\} \quad (17^*)$$

Einen besonderen Fall der Transformation (12) des vorgelegten Flächenstückes Φ bildet jede Biegung desselben ohne Dehnung. Dann haben die Functionen f, g bekanntlich den Bedingungen

$$E = E' \qquad F = F' \qquad G = G'$$

zu genügen, woraus mittelst der Formel (15) die Gleichung $J'^2 = 1$ folgt.

Sind alle Bedingungen des Satzes auf S. 239 erfüllt bis auf die eine, dass an keiner Stelle des Gebietes Φ die drei Ausdrücke J, K, L zugleich verschwinden[1]), so hat das Integral (4) noch immer einen Sinn. In einem solchen Falle soll es die Zahl der Fläche Φ erklären.

Corollar. „Zerlegt man das Gebiet Φ in zwei, Φ_1, Φ_2, so ist die Zahl, welche dem zu Φ gehörigen Stücke der Fläche (1) entspricht, gleich der Summe der Zahlen, welche den zu Φ_1 und Φ_2 gehörigen Stücken dieser Fläche ent-

---

1) Die Stellen u_0, v_0, an denen die Zahlen J, K, L zugleich verschwinden, liefern die singulären Punkte der Fläche (1). Doch ist dabei vorausgesetzt, dass die Functionen φ, ψ, χ so beschaffen seien, dass, wenn x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines solchen Punktes bedeuten, jedem Punkte x, y, z der Fläche bei gehöriger Kleinheit von $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, $|z - z_0|$ ein und nur ein System von Werthen u, v entspricht, welche beim Grenzübergange $\lim x = x_0$, $\lim y = y_0$, $\lim z = z_0$ bezw. zu u_0, v_0 convergiren.

sprechen.“ — Der Satz folgt unmittelbar aus dem 5. Satze auf S. 76 und 158, zufolge welchem neben $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ die Formel

$$\mathsf{A} = \mathcal{S}_{(\Phi)} = \mathcal{S}_{(\Phi_1)} + \mathcal{S}_{(\Phi_2)}$$

besteht.

15. Besonderer Fall. Die Complanation der Fläche $z = f(x, y)$.

Es sei eine begrenzte krumme Fläche gegeben, welche mit einer Parallelen zur z-Axe höchstens je einen Punkt gemein hat. Die Projection derselben auf die xy-Ebene sei die Fläche $\mathfrak{F}$. Analytisch wird die Fläche somit dargestellt durch eine Gleichung $z = f(x, y)$, unter $f(x, y)$ eine für jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ eindeutige und stetige Function verstanden. Wir nehmen noch an, dass die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y ebenfalls für jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ endlich und stetig seien.

Um den Satz von Nr. 13 auf diese Fläche anzuwenden, brauchen wir nur $u = x$, $v = y$ zu setzen. Wir haben also

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

und demnach

$$J = -\frac{\partial f}{\partial x} \qquad K = -\frac{\partial f}{\partial y} \qquad L = 1.$$

Es liefert somit der genannte Satz nunmehr die Formel

$$\mathsf{A} = \iint_{(\mathfrak{F})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{18}$$

Wenn einer der partiellen Differentialquotienten von z nach x und y oder beide im Gebiete $\mathfrak{F}$ nicht endlich sind (was schon dann eintritt, wenn die tangirende Ebene in einem zur Fläche $z = f(x, y)$ gehörigen Punkte der z-Axe parallel ist), so ist der Satz von Nr. 13 auf sie nicht mehr anwendbar. Gleichwohl ist im Falle, dass das Doppelintegral in der Formel (18) vorhanden ist, diese richtig, was sich auf einem Umwege beweisen lässt. Man wähle zur analytischen Darstellung der betrachteten Fläche zwei solche Parameter u, v, dass die Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z in den Formeln (1) nach ihnen im Gebiete Φ endlich sind. Alsdann

gelangt man vom Ausdrucke (4) für A durch Einführung der Veränderlichen x, y an Stelle von u, v vermittelst der Gleichungen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ zur Formel (18).

Beispiel. Man berechne den Inhalt A der Fläche, welche der Cylinder $x^2 + y^2 - ax = 0$ aus der oberen Halbkugel mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{19}$$

ausschneidet (vgl. S. 215 und Fig. 33). Zufolge der letzten Gleichung hat man

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

also

$$z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = a.$$

Daraus ergiebt sich nach der Formel (18), da $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ist,

$$\mathsf{A} = a\int\!\!\int_{(\mathfrak{k})} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \tag{20}$$

Führen wir wie auf S. 216 die Polarcoordinaten ein, so geht dieses Doppelintegral zufolge des Satzes 7) auf S. 174 über in

$$\mathsf{A} = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \tag{21}$$

vorausgesetzt, dass das Integral rechts einen Sinn hat. Nun ist aber

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(r^2)}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Wir erhalten also

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= a\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \sin\theta)\,d\theta\right\} \\ &= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\,d\theta = 2a\left\{\frac{\pi}{2} - 1\right\} = a\pi - 2a. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Man findet daher nach (21) $\mathsf{A} = a^2\pi - 2a^2$, d. i. $(a^2\pi - \mathsf{A}) : 2 = a^2$. Da $a^2\pi$ der Inhalt einer Viertelkugel vom Radius a ist, so besagt diese Formel, dass der Theil der Viertelkugel über dem Halbkreise $B'AB$, dessen Projection auf die xy-Ebene die Fläche $OPAB$ ist, den Inhalt a^2 besitzt. Es hat also einen in a rationalen Inhalt, sowie auch das über $OPAB$ stehende Stück jener Viertelkugel, dessen Inhalt nach S. 217 $2a^3 : 9$ ist.

Da aber die tangirende Ebene der Kugel im Punkte A zur z-Axe parallel ist, so bedarf es zur vollständigen Begründung der Formel (20) noch der obigen Bemerkung. Mit Benutzung der geographischen Länge und Breite φ, ψ lassen sich die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Kugel (19) durch die Formeln

$$x = a \cos\varphi \cos\psi \quad y = a \sin\varphi \cos\psi \quad z = a \sin\psi$$

darstellen, wobei φ die Werthe von $-\pi$ bis π, ψ die von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ zu durchlaufen hat. Die Differentialquotienten von x, y, z nach φ und ψ, welche bereits auf S. 230 unter (c*) aufgeführt sind, erweisen sich als für jedes System φ, ψ von diesen Werthen stetig. Somit wird der Inhalt des irgend einem Gebiete Φ der $\varphi\psi$-Ebene entsprechenden Stückes der Kugelfläche durch den Satz in Nr. 13 gefunden.[1])

16. Zone einer Umdrehungsfläche.

Die Fläche, welche durch Drehung der Curve CD (Fig. 34 auf S. 217) mit der Gleichung $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ um die x-Axe entsteht, hat nach Nr. 7 die Gleichung

$$y^2 + z^2 = f(x)^2. \tag{a}$$

Diese lässt sich nach z auflösen; man kann daher das in der Formel (18) auf S. 246 befindliche Doppelintegral aufstellen. Allein ob dasselbe die Zahl A für die in Rede stehende Fläche darstellt, ist aus dem Satze in Nr. 13 nicht zu entnehmen, weil die tangirende Ebene dieser Fläche in den Punkten der Curven CD und $C'D'$ auf der xy-Ebene senkrecht steht, also zur z-Axe parallel ist. Wir müssen daher zu einer anderen analytischen Darstellung unserer Umdrehungsfläche greifen. Uebrigens kann auch $f'(x)$ unendlich sein, nämlich wenn die Curve CD Punkte enthält, in welchen ihre Tangente der y-Axe parallel ist. Um die durchgängige Endlichkeit der Differentialquotienten annehmen zu dürfen, wollen wir die Coordinaten der sich drehenden Curve mittelst eines Parameters τ darstellen in der Form

$$x = \varphi(\tau) \quad y = \psi(\tau) \quad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta),$$

wobei die Functionen $\varphi(\tau)$ $\psi(\tau)$, sowie ihre Differentialquotienten im endlichen Intervalle (α, β) von τ allenthalben stetig und die Werthe von $\psi(\tau)$ nicht negativ sein sollen.

---

1) Die weitere Ausführung der Rechnung, welche hier nicht nöthig ist, findet man in Nr. 18.

Ziehen wir von einem beliebigen Punkte M der Umdrehungsfläche, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ seien, ein Loth MP auf die Drehungsaxe OX, so ist

$$OP = x = \varphi(\tau) \quad PM = \psi(\tau).$$

Bezeichnet ferner θ den Winkel des zur positiven y-Axe parallelen Halbstrahls PQ, mit dem Radius PM, abgelesen in einem bestimmten Sinne, so haben wir

$$y = PM \cos\theta \quad z = PM \sin\theta.$$

Die Gleichungen der Umdrehungsfläche sind also

$$x = \varphi(\tau) \quad y = \psi(\tau)\cos\theta \quad z = \psi(\tau)\sin\theta,$$

wobei τ von α bis β, θ von 0 bis 2π zu gehen hat. Auf diese Darstellung derselben können wir nun den Satz in Nr. 13 stets anwenden.

Es ist

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \varphi'(\tau) \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = \psi'(\tau)\cos\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\psi(\tau)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \psi'(\tau)\sin\theta \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \psi(\tau)\cos\theta,$$

somit

$$J = \psi(\tau)\psi'(\tau) \quad K = -\varphi'(\tau)\psi(\tau)\cos\theta \quad L = -\varphi'(\tau)\psi(\tau)\sin\theta$$

$$J^2 + K^2 + L^2 = \psi(\tau)^2[\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2]$$

$$\mathsf{A} = \iint_{(\mathfrak{R})} \psi(\tau)\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\,d\tau\,d\theta, \tag{b}$$

erstreckt auf das Rechteck $\mathfrak{R}$ in der $\tau\theta$-Ebene, welches zwischen den Abscissen $\tau = \alpha$, $\tau = \beta$ und den Ordinaten $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ liegt.

Die Integration nach θ lässt sich im Doppelintegrale auf der rechten Seite von (b) ausführen. Man hat

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

also schliesslich

$$\mathsf{A} = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(\tau)\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\,d\tau. \tag{c}$$

Bekanntlich ist das Integral rechts gleich dem Producte der Ordinate η des Schwerpunktes der homogen mit der Masse 1 belegten

Curve CD in die Länge L dieser selbst. Demnach folgt aus der Formel (c) die Guldin'sche Regel: $\mathsf{A} = L \,.\, 2\pi\eta$, d. i. der Inhalt der durch Drehung eines Bogens um eine Axe, die ihn nicht schneidet, entstehenden Zone ist gleich dem Producte der Länge des Bogens in den Weg seines Schwerpunktes.

Im Falle dass die Abscisse x, während τ das Intervall (α, β) durchläuft, beständig in demselben Sinne sich ändernd, von $x = a$ zu $x = b$ übergeht, kann man das Integral in (c) durch die Substitution $\varphi(\tau) = x$ transformiren. Bezeichnen wir die Umkehrung der Function $\varphi(\tau)$ mit $w(x)$, so dass $\varphi[w(x)] = x$ ist, und setzen $\psi[w(x)] = f(x)$, so haben wir

$$w'(x) = 1 : \varphi'(\tau), \quad f'(x) = \psi'_\tau[w(x)]\, w'(x) = \psi'(\tau) : \varphi'(\tau)$$

$$\psi(\tau) \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2} \,.\, w'(x) = f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Die Formel (c) verwandelt sich somit in die folgende:

$$\mathsf{A} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{d}$$

Hätten wir im Doppelintegral in (18) $z = \sqrt{f(x)^2 - y^2}$ eingesetzt und dann die Integration nach y ausgeführt, so wären wir auch zum Integral auf der rechten Seite von (d) gelangt.

17. Fortsetzung. Beispiele zur Formel (d).

1) Die Umdrehungsflächen 2. Ordnung mit einem Mittelpunkt. Die Gleichungen derselben ergeben sich unter der Voraussetzung, dass die x-Axe Drehungsaxe ist, aus den Gleichungen (a) bis (d) auf S. 213 durch die Annahme $b = c$. Sie lassen sich daher sämmtlich auf die Form

$$z^2 = \alpha x^2 - y^2 + \gamma \tag{e}$$

bringen. Die sich drehende Curve hat die Gleichung

$$y^2 = \alpha x^2 + \gamma, \text{ so dass } f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \gamma}$$

ist. Demnach ist

$$f(x) f'(x) = \alpha x,$$

also erhalten wir nach der Formel (d) für den Inhalt der von den Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ aus der Fläche (e) herausgeschnittenen Zone

$$\mathsf{A} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha(1 + \alpha) x^2 + \gamma}\, dx. \tag{f}$$

Die Einsetzung $\alpha = -1$ $\gamma = a^2$ liefert hieraus die Oberfläche der Kugelzone: $2a\pi\,(x_2 - x_1)$, die Einsetzung $\alpha = b^2 : a^2$ $\gamma = 0$ die des geraden Kegelstumpfes: $\pi b \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, (x_2^2 - x_1^2) / a^2$. Für die übrigen Fälle bemerke man, dass nach S. 314 d. I. T.

$$\int \sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma} + \frac{\gamma}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma}} \quad \text{(g)}$$

ist. Hier muss nun getrennt werden der Fall des verlängerten Drehungsellipsoids ($-\alpha = b^2 : a^2 < 1$, $\gamma = b^2$) von den übrigen. Im ersteren, wo sich die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b < a) \quad \text{(h)}$$

um ihre grosse Axe dreht, ist $\alpha(1+\alpha)$ negativ. Setzt man

$$a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2$$

(ε die numerische Excentricität), so hat man

$$\alpha(1+\alpha) = -\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) \quad b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}} = \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a}.$$

Demnach ergiebt sich aus (f) und (g)

$$\mathsf{A} = \pi \Big|_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-\varepsilon^2}\left(x\sqrt{a^2-\varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a}\right).$$

Hieraus erhält man durch die Annahme $x_1 = -a$ $x_2 = a$ als Oberfläche des verlängerten Drehungsellipsoids

$$2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right).$$

In den übrigen Fällen ist $\alpha(1+\alpha)$ positiv und man hat daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}\, l[x\sqrt{\alpha(1+\alpha)} + \sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma}].$$

Also ist nunmehr

$$\mathsf{A} = \pi \Big|_{x_1}^{x_2} x\sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma} + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}\, l[x\sqrt{\alpha(1+\alpha)} + \sqrt{\alpha(1+\alpha)x^2+\gamma}].$$

Bemerkenswerthe besondere Fälle dieser Formel sind:

a) Die Oberfläche O des abgeplatteten Drehungsellipsoids, wobei

$$\alpha = -b^2 : a^2 \quad (b > a) \qquad \gamma = b^2 \qquad x_1 = -a \qquad x_2 = a$$
$$b^2 - a^2 = b^2\varepsilon^2, \text{ also } \alpha(1+\alpha) = \varepsilon^2 : (1-\varepsilon^2)^2$$

zu setzen ist. Wir finden mithin

$$O = \pi b^2 \left(2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\, l \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

b) Die Haube des rechten Mantels des getheilten Drehungshyperboloids von der Höhe h, wobei

$$\alpha = b^2 : a^2 \qquad \gamma = -b^2 \qquad x_1 = a \qquad x_2 = a + h$$

$$a^2 + b^2 = a^2\varepsilon^2 \qquad (\varepsilon > 1)$$

zu setzen sind.

2) Für die Haube des durch Drehung der Parabel $y^2 = 2px$ um die x-Axe erzeugten **Paraboloids** ergiebt sich, wenn h ihre Höhe ist, als Zahl

$$\mathsf{A} = 2\pi \int_0^h \sqrt{2px + p^2}\, dx = 2\pi \Big|_0^h \frac{1}{3p}(2px + p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left\{\sqrt{p(2h+p)^3} - p^2\right\}.$$

3) Um die Zahl des Wulstes, welcher durch Drehung eines Kreises um eine denselben nicht schneidende Axe in seiner Ebene entsteht, zu erhalten, berechnet man die durch Umdrehung der Halbkreise BDB' und $BD'B'$ (Fig. 36 auf S. 218) erzeugten Zonen A, A'. Man hat für die Ordinaten dieser Curven

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2} \qquad y = b - \sqrt{a^2 - x^2},$$

somit für beide

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Demnach ist nach der Formel (d)

$$\mathsf{A} = 2\pi a \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\mathsf{A}' = 2\pi a \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

also

$$\mathsf{A} + \mathsf{A}' = 4ab\pi \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4ab\pi^2$$

(S. 388 d. I. T.). Der Flächeninhalt des Wulstes ist mithin gleich $2a\pi \,.\, 2b\pi$, wie es die obige Guldin'sche Regel verlangt.

Falls die Drehaxe XX' den Kreis schneidet, so ist, wie man leicht erkennt, $4ab\pi^2$ gleich dem Unterschiede der Oberflächen, welche durch die Drehung der beiden Abschnitte, in welche der Kreis durch die Axe XX' zerfällt, um dieselbe erzeugt werden.

18. Complanation der sphärischen Flächen mit Hilfe der geographischen Coordinaten.

Wir wollen endlich den Satz von Nr. 13 anwenden auf die Complanation eines beliebigen Stückes der Kugelfläche vom Radius a, indem wir ihren Mittelpunkt zum Ursprung der Coordinaten wählen und die Coordinaten eines willkürlichen Punktes derselben mit Hilfe der geographischen Länge und Breite, φ und ψ, durch die Gleichungen

$$x = a\cos\varphi\cos\psi \quad y = a\sin\varphi\cos\psi \quad z = a\sin\psi \tag{1}$$

darstellen. Wir finden

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -a\sin\varphi\cos\psi \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = a\cos\varphi\cos\psi \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial\psi} = -a\cos\varphi\sin\psi \quad \frac{\partial y}{\partial\psi} = -a\sin\varphi\sin\psi \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = a\cos\psi,$$

also, indem wir a. a. O. u, v bezw. durch φ, ψ ersetzen,

$$J = a^2\cos\varphi\cos\psi^2 \quad K = a^2\sin\varphi\cos\psi^2 \quad L = a^2\sin\psi\cos\psi$$

$$J^2 + K^2 + L^2 = a^4\cos\psi^2, \quad \sqrt{J^2 + K^2 + L^2} = a^2\cos\psi.$$

Denn da ψ das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nicht verlässt, so ist $\cos\psi \geqq 0$. Somit ergiebt sich für die dem Gebiete Φ in der $\varphi\psi$-Ebene entsprechende sphärische Fläche

$$\mathsf{A} = a^2 \int\int_{(\Phi)} \cos\psi \, d\varphi \, d\psi. \tag{2}$$

Um den Inhalt O der ganzen Kugelfläche zu erhalten, lässt man φ von $-\pi$ bis π und ψ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ gehen. Es ist demnach

$$O = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi . \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = a^2 . 2 . 2\pi = 4a^2\pi. \tag{3}$$

Ein weiteres Beispiel zur Anwendung der Formel (2) bietet das Stück der Kugelfläche, dessen Inhalt auf S. 247 berechnet ist. Der Leser wird sich leicht überzeugen, dass man auf diesem Wege bequemer zur Formel (22) a. a. O. gelangt, als auf dem dort eingeschlagenen. Man erhält nämlich für den genannten Inhalt

$$a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi\right]$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi = a^2\pi - 2a^2.$$

Anmerkung. Auf die nämliche Art erhält man die Zahl eines Stückes der im 3. Beispiele von Nr. 10 betrachteten Oberfläche mit der Polargleichung $r = f(\varphi, \psi)$, deren Punkte somit die in den Formeln (g) a. a. O. angegebenen Coordinaten besitzen. Man bedient sich mit

Vortheil der auf S. 240 eingeführten Ausdrücke E, F, G, wofür man hier erhält:

$$E=\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+r^2\cos\psi^2 \quad F=\frac{\partial r}{\partial \varphi}\,\frac{\partial r}{\partial \psi} \quad G=\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2+r^2.$$

Es ist mithin

$$EG-F^2=r^2\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos\psi^2\right\}, \qquad (3^*)$$

also

$$\mathsf{A}=\int\int_{(\Phi)} r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos\psi^2}\,d\varphi\, d\psi.$$

19. Neuer Beweis eines Satzes von Gauss aus der Lehre von der Anziehung homogener Ellipsoide.[1])

So einfach die Ergebnisse der vorigen Nummer an sich auch sein mögen, so können sie doch zum Beweise eines wichtigen Satzes dienen, den Gauss a. a. O. aufgestellt hat. Er lautet:

„Es sei gegeben eine einfache geschlossene Fläche $\mathfrak{O}$ und zwar seien die Coordinaten aller ihrer Punkte M durch die nämlichen Gleichungen

$$x=\varphi(u,v) \qquad y=\psi(u,v) \qquad z=\chi(u,v) \qquad (4)$$

dargestellt, wobei den Parametern u, v ein gewisses Gebiet Φ in der uv-Ebene angewiesen ist. Die Functionen φ, ψ, χ sind an jeder Stelle u, v von Φ eindeutig und stetig. Ihre partiellen Differentialquotienten erster Ordnung nach u und v mögen stetig sein mindestens in allen Punkten eines jeden Gebietes, welches von Φ dadurch, dass einzelne Punkte und Linien durch beliebig kleine Umgebungen ausgeschlossen werden, übrig bleibt.“

„Wenn dann D den Abstand eines festen Punktes $A\equiv(a,b,c)$ vom willkürlichen Flächenpunkte M bezeichnet, so dass

$$D^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

ist, d die Richtung von A gegen M und n die äussere Normale der Fläche $\mathfrak{O}$ in M, endlich E, F, G die

1) Werke V. S. 9. Dass der Satz im Falle, dass der Punkt A der Fläche selbst angehört, einer Einschränkung bedürfe, bemerkt Gauss selbst (a. a. O. S. 224).

nämliche Bedeutung haben wie auf S. 240, so ist das Doppelintegral

$$\iint_{(\Phi)'} \frac{\cos \widehat{dn} \,.\, \sqrt{EG - F^2}}{D^2} du\, dv \qquad (5)$$

stets vorhanden und hat (bei positiven du, dv) den Werth 4π, 2π oder 0, je nachdem der Punkt A innerhalb, auf oder ausserhalb der Fläche $\mathfrak{O}$ liegt.

Befindet sich der Punkt A auf der Fläche $\mathfrak{O}$ selbst, so dürfen indess die Differentialquotienten erster Ordnung der Coordinaten nach u und v bei ihm nicht unstetig sein und die drei Ausdrücke J, K, L a. a. O. dafür nicht zugleich verschwinden. Die Fläche $\mathfrak{O}$ soll also in A eine tangirende Ebene haben."

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass das Integral (5), wenn es einen Sinn hat, seine Form weder durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten unter Festhaltung der Axenrichtungen, noch dadurch ändert, dass an Stelle der Parameter u, v zwei andere u', v' treten. Das erstere ergiebt sich daraus, dass, wenn wir in (5)

$$x = a + x'$$
$$y = b + y'$$
$$z = c + z',$$

(wo a, b, c zunächst beliebig sein mögen) setzen, blos die Differentialquotienten von x, y, z nach u und v in die entsprechenden von x', y', z' übergehen; das letztere wird auf die nämliche Weise gefunden, wie die Formel (17*) auf S. 245.

Zufolge der ersteren Bemerkung können wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt A verlegen, was wir dadurch ausdrücken, dass wir in (5) anstatt D r $(= OM)$ und statt d r schreiben. Die Cosinus der Richtung

$$\mathrm{r} \equiv OM$$

sind $x:r$, $y:r$, $z:r$, die für die Richtung der äusseren Normale der Fläche $\mathfrak{O}$ nach S. 226 und der Formel (5) auf S. 240

$$\varepsilon J : \sqrt{EG - F^2}$$
$$\varepsilon K : \sqrt{EG - F^2}$$
$$\varepsilon L : \sqrt{EG - F^2},$$

worin ε einen der Werthe $+1$ und -1 bedeutet und zwar für alle Punkte der Fläche $\mathfrak{O}$ den nämlichen. Wir erhalten demnach

$$\left.\begin{aligned} \cos\widehat{rn} &= \frac{\varepsilon}{r\sqrt{EG-F^2}}(Jx + Ky + Lz) \\ &= \frac{\varepsilon}{r\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Bezeichnen wir diese Determinante kurz mit Δ, so erhält das in Rede stehende Doppelintegral mithin den Ausdruck

$$\mathfrak{J} = \varepsilon \int\int_{(\Phi)} \frac{\Delta}{r^3}\, du\, dv \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{7}$$

Um dieses Integral zu berechnen, gehen wir zu den räumlichen Polarcoordinaten r, φ, ψ (S. 232) über, wobei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

1. Fall. Der Punkt O liegt innerhalb der Fläche $\mathfrak{O}$, von welcher zunächst angenommen werde, dass sie von jedem Halbstrahle durch O nur in einem Punkte getroffen wird. Wir haben es also mit der a. a. O. betrachteten Fläche, deren Polargleichung $r = f(\varphi, \psi)$ ist, zu thun. Nach der Formel (i) daselbst ist die auf die Parameter φ, ψ bezogene Determinante Δ:

$$\Delta(\varphi, \psi) = r^3 \cos\psi, \tag{8}$$

so dass das Integral (7) in

$$\varepsilon \int\int_{(\mathfrak{R})} \cos\psi\, d\varphi\, d\psi \tag{9}$$

übergeht, worin $\mathfrak{R}$ das Rechteck in der $\varphi\psi$-Ebene zwischen den Abscissen $\varphi = -\pi$ und $\varphi = \pi$ und den Ordinaten $\psi = -\frac{\pi}{2}$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ bezeichnet und $d\varphi$, $d\psi$ wie gewöhnlich

als positiv zu betrachten sind. Wir haben nach den Formeln (6) und (8)

$$\cos \widehat{rn} = \varepsilon \frac{r^2 \cos \psi}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{10}$$

worin $EG - F^2$ durch den Ausdruck (3*) zu ersetzen ist. Da nun zufolge des Anblickes $\widehat{rn}$ ein spitzer Winkel und der Bruch neben ε durchaus positiv ist, so hat man $\varepsilon = +1$ zu nehmen. Wir haben also nach der Formel (3) auf S. 253

$$\mathfrak{J} = \iint_{(\mathfrak{R})} \cos \psi \, d\varphi \, d\psi = 4\pi. \tag{11}$$

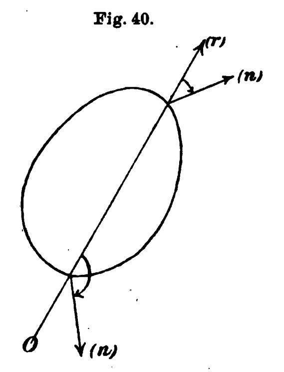
2. Fall. O sei ein Punkt der Fläche $\mathfrak{O}$, von der wir annehmen, dass sie von jedem Halbstrahl durch O ausser in O höchstens noch in einem Punkte geschnitten wird. Die Fläche $\mathfrak{O}$ liegt somit vollständig auf einer Seite der sie in O berührenden Ebene. Das Integral $\mathfrak{J}$ geht bei Einführung der räumlichen Polarcoordinaten über in

$$\iint \cos \psi \, d\varphi \, d\psi,$$

erstreckt über alle Werthsysteme φ, ψ, welche zu einer Halbkugel vom Mittelpunkte O und dem Radius 1 gehören, hat also den Werth 2π.

3. Fall. O liegt ausserhalb der geschlossenen Fläche $\mathfrak{O}$, welche von jedem Halbstrahl durch O höchstens in zwei Punkten geschnitten werde. Die Tangenten der Fläche $\mathfrak{O}$, welche durch O gehen, berühren sie längs einer geschlossenen Linie, welche sie in zwei Stücke zerlegt. In demjenigen von ihnen, welches aus den dem Punkte O näheren Punkten von $\mathfrak{O}$ besteht, ist, wie der Anblick zeigt, der Winkel $\widehat{rn}$ stumpf, also $\cos \widehat{rn}$ negativ, in dem anderen ist er spitz und daher $\cos \widehat{rn}$ positiv. (Vgl. die Fig. 40, welche einen ebenen Schnitt der Fläche $\mathfrak{O}$ durch O darstellt, in welchem indess die Flächennormalen n nicht zu liegen brauchen.) Für das erstere Stück ist also

Fig. 40.

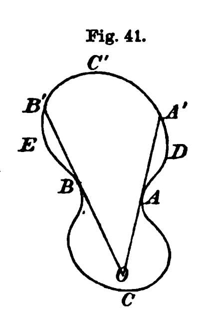


nach der Formel (10) $\varepsilon = -1$, für das letztere $\varepsilon = +1$. Jedem von ihnen entspricht das nämliche Gebiet $\mathfrak{F}$ in der $\varphi\psi$-Ebene. Wir erhalten demnach

$$\mathfrak{J} = \iint_{(\mathfrak{F})} \cos\psi\, d\varphi\, d\psi - \iint_{(\mathfrak{F})} \cos\psi\, d\varphi\, d\psi = 0.$$

4) Auch in allen übrigen Fällen ist vor der Transformation des Integrals $\mathfrak{J}$ durch Einführung von φ, ψ eine Zerlegung des ursprünglichen Gebietes Φ, d. i. der Oberfläche $\mathfrak{O}$, erforderlich. Wir betrachten dieselbe als eine gewöhnliche, d. h. nehmen an, dass die Anzahl der Punkte, welche sie mit irgend einer Geraden gemein hat, eine bestimmte Zahl nicht übersteige. Liegt der Punkt O innerhalb $\mathfrak{O}$, so wird jeder Halbstrahl durch O, der $\mathfrak{O}$ nicht berührt, diese Fläche in einer ungeraden Anzahl von Punkten schneiden, welche wir vom Punkte O ab gegen die Fläche hin zählen. Ihre ersten Schnittpunkte mit den Halbstrahlen durch O, d. i. die auf ihnen dem Punkte O nächstgelegenen, erfüllen zwei oder mehrere getrennte Stücke von $\mathfrak{O}$ und zwar so, dass um sie zu beschreiben, φ alle Werthe von $-\pi$ bis π, ψ alle von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ annehmen muss. (Z. B. auf der birnenförmigen Fläche, von welcher Fig. 41 einen ebenen Schnitt durch O darstellt, bilden die genannten Punkte zwei Gebiete, wovon der Schnitt die Linien ACB und $A'C'B'$ enthält.) Die den erwähnten Gebieten entsprechenden Theile des Integrals (7), für deren jeden $\varepsilon = +1$ sein muss, liefern nun zusammen beim Uebergange zu den Polarcoordinaten wieder das Integral (11), haben also zusammen den Werth 4π. Die zweiten und dritten Schnittpunkte von $\mathfrak{O}$ mit den Halbstrahlen durch O erfüllen mit einander ein oder mehrere zusammenhängende Stücke von $\mathfrak{O}$, deren jedes von einem das Innere treffenden Halbstrahl in zwei Punkten durchbohrt wird. (In jener besonderen Fläche sei ein solches Lager vorhanden, welches von der Ebene der Fig. 41 in den

Fig. 41.



Curven ADA' und BEB' geschnitten werde.) Hinsichtlich des Theiles vom Integral $\mathfrak{J}$, der einem von den zuletzt erwähnten Stücken der Fläche $\mathfrak{O}$ entspricht, gilt das beim 3. Falle Bemerkte: er verschwindet somit. Das Nämliche kann man behaupten von den Theilen des Integrals $\mathfrak{J}$, welche erstreckt sind über die Stücke der Fläche $\mathfrak{O}$, die von den etwaigen vierten und fünften Schnittpunkten dieser Fläche mit den Halbstrahlen durch O gebildet werden. U. s. f. für jedes weitere Paar von Schnittpunkten. Hieraus erhellt, dass das Integral $\mathfrak{J}$ im Falle, dass der Punkt O innerhalb der Fläche $\mathfrak{O}$ liegt, den Werth 4π hat.

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass, je nachdem der Anfangspunkt O auf oder ausserhalb der Fläche $\mathfrak{O}$ sich befindet, das Integral $\mathfrak{J}$ stets gleich 2π oder 0 ist.

Nachträge zum I. Theile.

Aus den Entwickelungen von Nr. XVIII. 12 und 13 ist ersichtlich, dass Fragen, welche selbst bei den uneigentlichen Doppelintegralen der einfachsten Art auftauchen, sich nur mit Hilfe der allgemeinen Sätze über die eigentlichen und uneigentlichen einfachen bestimmten Integrale in wirklich befriedigender Weise erledigen lassen. Namentlich bedürfen wir hierzu des allgemeinen Begriffes der absolut convergenten einfachen Integrale. Wir müssen daher den X. Abschnitt des I. Theiles in dieser Beziehung ergänzen.

I. Ueber unendliche Systeme oder Mengen von Punkten.

Wenn eine unendliche Menge von Werthen x, von welchen jeder zwischen denselben endlichen Zahlen a, b liegt, vorgelegt ist, so giebt es mindestens einen Werth, in dessen jeder Umgebung unendliche viele Werthe der Menge liegen. Wir denken uns diese Werthe als Abscissen auf einer Axe aufgetragen, so dass jedem Werthe ein Punkt derselben entspricht. Theilen wir das Intervall $b - a = d$ in $e\,(\geqq 2)$ gleiche Theile, so befindet sich darunter mindestens einer, in welchem unzählig viele Punkte x enthalten sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre die Menge der Punkte eine endliche. Die Grenzen dieses Theiles oder, falls es deren mehrere giebt, desjenigen, welcher dem das Intervall (a, b) in positivem Sinne abschreitenden Beobachter zuerst begegnet, seien $a + c_1 d:e$ und $a + (c_1 + 1)\,d:e$, wobei $0 \leqq c_1 \leqq e - 1$ ist. Wird der soeben erwähnte Theil von der Länge $d:e$ wieder in e gleiche Theile zerlegt, so gilt Aehnliches. Es giebt unter diesen Theilen von der Länge $d:e^2$ einen ersten

$$\left[a+\left(\frac{c_1}{e}+\frac{c_2}{e^2}\right)d,\ \ a+\left(\frac{c_1}{e}+\frac{c_2+1}{e^2}\right)d\right],$$

welcher unzählig viele Punkte der gegebenen Menge enthält. Er wird wieder in e gleiche Theile getheilt u. s. f. Hierdurch gelangen wir zu einer Zahl

$$c=\frac{c_1}{e}+\frac{c_2}{e^2}+\cdots+\frac{c_n}{e^n}+\cdots$$

von der folgenden Beschaffenheit. Setzen wir

$$\frac{c_1}{e}+\frac{c_2}{e^2}+\cdots+\frac{c_n}{e^n}=S_n,$$

so befinden sich in jedem Intervalle

$$(a+S_n d,\ a+[S_n+e^{-n}]d) \quad (n=1,2\ldots)$$

unendlich viele Punkte der vorgelegten Menge. Da nun die Zahl $a+cd$ ebenfalls jedem solchen Intervalle angehört, so ist klar, dass in dem Intervalle $(a+cd-\varepsilon,\ a+cd+\varepsilon)$, mag ε was immer für eine positive Zahl sein, unzählig viele von den gegebenen Punkten liegen müssen. Man braucht, um dies einzusehen, ja nur n so gross anzunehmen, dass $e^{-n}<\varepsilon:d$ ist.

Wenn zu einer Punktmenge auf der x-Axe eine unbegrenzte Folge von Punkten mit den Abscissen $x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$, welche bei $\lim n \doteq \infty$ den endlichen Grenzwerth X haben, gehört, so heisst der Punkt $x=X$ ein Grenzpunkt der Punktmenge.[1]) Grenzpunkte hat jede unendliche Punktmenge im Endlichen [d. h. innerhalb eines endlichen Intervalles $(a,\ b)$]; ein solcher ist gewiss der obige Punkt $x=a+cd$. Greifen wir nämlich einen von ihm verschiedenen Punkt der Menge $x=x_1$ im Intervalle $(a,\ b)$ heraus, so ist entweder

$$2(a+cd)-x_1<a+cd<x_1 \text{ oder } x_1<a+cd<2(a+cd)-x_1,$$

also können wir dem Punkte $x=x_1$ einen zweiten, wieder von $a+cd$ verschiedenen Punkt der Menge, $x=x_2$, in einem der soeben angegebenen Intervalle zuordnen u. s. f. ins Unendliche.

---

1) So ist z. B. für das in XVII. 4* unter 1) angeführte System der Punkt $x=0$ ein Grenzpunkt und zwar der einzige.

Die Gesammtheit der Grenzpunkte einer endlichen Punktmenge wird nach G. Cantor (Math. Ann. V. S. 129) als die Ableitung derselben bezeichnet. Gehört zur Menge ihre Ableitung, so heisst sie nach C. Jordan (C. d'Analyse I. S. 19) „parfait", was ich mit „vollständig" übersetze.

Ist die Ableitung einer unendlichen Punktmenge selbst eine unendliche Menge, so hat sie ihrerseits eine Ableitung, welche die zweite Ableitung der ursprünglichen Menge genannt wird. U. s. f.

Eine unendliche Punktmenge im Endlichen, zu der blos eine endliche Anzahl von Ableitungen gehört, heisst von erster Gattung und zwar von jener Ordnung, welche die letzte Ableitung angiebt; jede andere von zweiter Gattung.

Die vorstehenden Begriffe lassen sich ohne Weiteres auf Systeme von Punkten in einer zwei- oder mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit übertragen. Kommt z. B. in einem Systeme von Punkten x, y die unbegrenzte Schaar von Punkten

$$x_n, y_n (n = 1, 2 \ldots)$$

vor, wofür x_n bei $\lim n = +\infty$ den endlichen Grenzwerth X, y_n den endlichen Grenzwerth Y besitzt, so heisst X, Y ein Grenzpunkt des betrachteten Punktsystems.

II. Ueber das obere und untere Integral einer Function einer Veränderlichen.

1. Die Betrachtungen auf S. 353—357 d. I. T., welche zum Beweise des Satzes (S) dienen, liefern auch den Beweis des nachstehenden Satzes, gerade so wie aus denen in XVII. 3 die Existenz eines Grenzwerthes hervorgeht, von welchem das obere Doppelintegral einen besonderen Fall bildet.

„Im endlichen Intervalle (a, b) worin $a < b$ ist, sei ein System von Punkten $\mathfrak{F}$ gegeben und es sei für jeden von ihnen, x, eine eindeutige Function $f(x)$ erklärt, welche für ihre Gesammtheit endlich ist, d. h. es gebe zwei Zahlen A, B derart, dass, mag x was immer für ein Punkt des Systemes $\mathfrak{F}$ sein, $A < f(x) < B$ ist."

„Wir schalten zwischen a und b $n-1$ Werthe

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1}$$

ein, wodurch das Intervall (a, b) in n Theile von den Längen $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ zerfällt. Diejenigen unter ihnen, in welchen Punkte von $\mathfrak{F}$ vorkommen, seien mit $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{m_n}$ bezeichnet. Die Werthe von $f(x)$ in den Systempunkten des Intervalles τ_r sollen die obere Grenze g_r und die untere k_r haben. Dann haben die Summen

$$\sum_1^{m_n} {}_r g_r \tau_r \qquad \sum_1^{m_n} {}_r k_r \tau_r$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme aller Strecken δ_r, deren Summe jedoch stets $b-a$ bleiben muss, je einen endlichen Grenzwerth G, K, d.h. jedem $\varepsilon > 0$ entspricht ein $\Delta > 0$ so, dass sowohl

$$0 < \sum_1^{m_n} {}_r g_r \tau_r - G < \varepsilon, \quad \text{als auch } 0 < K - \sum_1^{m_n} {}_r k_r \tau_r < \varepsilon \quad (1)$$

ist, wenn nur jedes δ_r $(r = 1, 2 \dots n)$ kleiner als Δ ist.“

Aber auch die Summen

$$\sum_1^{p_n} {}_r g'_r \tau'_r \qquad \sum_1^{p_n} {}_r k'_r \tau'_r,$$

worin die τ'_r diejenigen unter den Theilen $\tau_1 \dots \tau_{m_n}$ bezeichnen, welche blos aus Systempunkten bestehen, und g'_r, k'_r die obere und untere Grenze der zu den x des Theiles τ'_r gehörigen Werthe von $f(x)$ bedeuten, haben bei

$$\lim \delta_r = 0 \quad (r = 1, 2 \dots n)$$

je einen endlichen Grenzwerth G', K'.

Lassen wir $f(x)$ für jedes x im Systeme $\mathfrak{F}$ gleich 1 sein, so ist $g_r = k_r$, also $G = K$ $(= L)$, $G' = K'$ $(= L')$ und dabei $L \geqq L'$. L soll die äussere, L' die innere Länge des Punktsystemes $\mathfrak{F}$ heissen. Ist $L = L'$, so wird ihr gemeinsamer Werth zur Länge des Punktsystemes $\mathfrak{F}$. Beispiele dieser Zahlen sind schon in XVII. 4* vorgeführt.

Wenn $L = 0$ ist, so ist auch $L' = 0$. Das Punktsystem $\mathfrak{F}$ hat die Länge Null und wird discret genannt. Ein solches System ist dadurch vollständig charakterisirt, dass die ihm angehörigen Punkte sämmtlich in Theilstrecken $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ des Intervalles (a, b) liegen, deren Summe kleiner ist als eine beliebig gegebene positive Zahl ε. Denn es ist nach (1)

$$0 \leqq L < \sum_r \tau_r, \text{ also } L < \varepsilon,$$

somit, da ε jede positive Zahl sein kann, $L = 0$. — Jedes Punktsystem 1. Gattung (S. 262) ist discret.

Lassen wir das System $\mathfrak{F}$ die Gesammtheit aller Punkte im Intervalle (a, b) von x sein, so fallen sowohl die Strecken $\tau_1 \ldots \tau_{m_n}$, als auch die $\tau'_1 \ldots \tau'_{p_n}$ mit den Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ zusammen. Es ist mithin

$$G = G' = \lim_{\delta_r = 0} \sum_1^n {}_r g_r \delta_r \quad K = K' = \lim_{\delta_r = 0} \sum_1^n {}_r k_r \delta_r;$$

wir gelangen also zu den auf S. 351 d. I. T. eingeführten Grenzwerthen, welche wir nunmehr das obere und untere Integral der Function $f(x)$ im Intervalle (a, b)[1]) nennen werden. Wir gebrauchen dafür nach C. Jordan die Bezeichnungen

$$G = \int_a^{(1)b} f(x)dx \qquad K = \int_a^{(2)b} f(x)dx.$$

2. Es dient auch im X. Abschnitte zur Abkürzung der Darstellung, den Satz, welcher dem 2. Satze in XVII. 5 entspricht, zwischen Nr. 2 und 3 einzuschalten. Dann kann der III. Nachtrag auf S. 330 d. II. T. entfallen.

Der erwähnte Satz lautet: „Zur Existenz des bestimmten Integrals der endlichen Function $f(x)$ über das Intervall (a, b) ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl ε ein System von Theilen $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ des Intervalls $b - a$ so sich zuordnen lässt, dass die nicht negative Summe

1) Diese Namen wurden von V. Volterra (Battaglini Giornale XIX. S. 340) und M. Pasch (Math. Ann. Bd. 30 S. 149) eingeführt.

$$0 \leqq \sum_1^n r(g_r - k_r)\delta_r < \varepsilon \tag{2}$$

ist.“[1]) — Dass diese Bedingung nothwendig ist, leuchtet nach S. 352 d. I. T. unmittelbar ein. Sie reicht aber auch aus. Da, wie auch die Theile $\delta_1 \ldots \delta_n$ gewählt sein mögen, stets

$$G \leqq \sum_1^n r g_r \delta_r \quad K \geqq \sum_1^n r k_r \delta_r$$

ist, so schliessen wir aus (2), dass

$$0 \leqq G - K < \varepsilon$$

ist. Hier darf ε jede positive Zahl sein, mithin ist

$$G - K = 0.$$

2*. Integrirbare Functionen.

Wir geben jetzt den Beweis des auf S. 172 benutzten Satzes, welcher zugleich den Untersuchungen in X. 3 einen gewissen Abschluss verleiht.

Satz.[2]) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die im Intervalle (a, b) von x allenthalben eindeutig erklärte und darin endliche Function $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ integrirbar ist, besteht darin, dass zu jeder positiven Zahl ε ein discretes System $\mathfrak{M}_\varepsilon$ (das mit der Zahl ε sich ändern kann) von Punkten x' gehört, in welchem der Sprung von $f(x)$ grösser als ε ist.“

Dabei verstehen wir unter dem Sprunge von $f(x)$ in dem Punkte $x = x'$ den Unterschied: obere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei $x = x'$ weniger untere Unbestimmtheitsgrenze.[3]) Bezeichnen wir dieselben mit $O(x')$ und $U(x')$ und den Sprung von $f(x)$ bei $x = x'$ mit $D(x')$, so hat man also

$$D(x') = O(x') - U(x') \; (\geqq 0). \tag{1}$$

a) Nothwendigkeit dieser Bedingung. Bedeutet $x = x'$ zunächst einen beliebigen Punkt des Intervalles (a, b), so

1) Vgl. Dini, Grundlagen § 185.

2) Im Wesentlichen bei Dini-Lüroth, Grundlagen § 187*.

3) Vgl. Arithmetik I. S. 164. Bei Aufstellung derselben ist auch der Werth $f(x')$ zu berücksichtigen.

lässt sich jedem $\varkappa > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, dass es im Intervalle $(x' - \delta, x' + \delta)$ mindestens einen Werth x_1 giebt, wofür

$$f(x_1) > O(x') - \varkappa,$$

und mindestens einen Werth x_2, wofür

$$f(x_2) < U(x') + \varkappa$$

ist. Somit haben wir

$$f(x_1) - f(x_2) > D(x') - 2\varkappa. \tag{2}$$

Theilen wir nun das Intervall $b - a$ in n beliebige Theile $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ und bezeichnen mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$ diejenigen unter ihnen, in welchen mindestens ein Punkt der Menge $\mathfrak{M}_\varepsilon$ vorkommt. Es sei ferner σ_r die Schwankung von $f(x)$ im Theile δ_r, τ_s die im Theile ε_s. Wir haben alsdann, da der letztere Theil mindestens einen Punkt x' enthält, wofür $D(x')$ grösser als ε ist, nach (2)

$$\tau_s > \varepsilon - 2\varkappa.$$

Demnach ist

$$\sum_1^n{}_r\, \sigma_r \delta_r > (\varepsilon - 2\varkappa) \sum_1^{k_n}{}_s\, \varepsilon_s. \tag{3}$$

Hätte nun das Punktsystem x' eine positive äussere Länge L (S. 263), so wäre

$$\sum_1^{k_n}{}_s\, \varepsilon_s \geqq L,$$

somit nach (3)

$$\sum_1^n{}_r\, \sigma_r \delta_r > (\varepsilon - 2\varkappa) L.$$

Wie klein man sich auch die Theile δ_r denken mag, $\sum_r \sigma_r \delta_r$ würde also stets über einer positiven Constanten liegen; diese Summe könnte also bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1 \ldots n)$ nicht zum Grenzwerthe 0 convergiren.

b) Die in Rede stehende Bedingung reicht aus. Beim Beweise dieser Behauptung bedienen wir uns des nachstehenden Hilfssatzes[1]), den wir unten zeigen werden.

---

1) Vgl. Dini-Lüroth, Grundlagen S. 334. Der Beweis desselben ergiebt sich in Anlehnung an den a. a. O. § 41 mitgetheilten Cantorschen Beweis des Satzes über stetige Functionen, I. T. S. 348, welcher als der der Annahme $\varepsilon = 0$ entsprechende besondere Fall desselben angesehen werden kann.

Hilfssatz. „Wenn die im Intervalle (a, b) von x eindeutige und endliche Function $f(x)$ in den Punkten desselben nur Sprünge macht, deren Betrag die Zahl ε nicht übersteigt, so lässt sich jeder Zahl $\varkappa > 0$ eine andere $\lambda > 0$ so zuordnen, dass, wenn x und x_1 irgend zwei Punkte des Intervalles (a, b) bedeuten, deren Abstand kleiner als λ ist, alsdann stets

$$|f(x_1) - f(x)| < \varepsilon + \varkappa$$

ist.“

Angenommen, dass für jedes x

$$a \leqq x \leqq b \qquad A < f(x) < B$$

ist, und die Richtigkeit dieses Hilfssatzes vorausgesetzt, finden wir, dass, wenn ein jedes δ_r kleiner als λ ist, dann

$$\sum_1^n {}_r\, \sigma_r \delta_r < (\varepsilon + \varkappa) \sum{}_r' \delta_r + (B - A) \sum_1^{k_n} {}_s\, \varepsilon_s \tag{4}$$

sein muss. Dabei bezieht sich die Summe $\sum_r'$ auf alle jene Theile δ_r, welche keinen Punkt der Menge $\mathfrak{M}_s$ enthalten; sie ist natürlich kleiner als $b - a$. Wir können ferner die ε_s so klein annehmen, dass

$$\sum_1^{k_n} {}_s\, \varepsilon_s < \varkappa$$

ist. Demnach hat man nach (4)

$$\sum_1^n {}_r\, \sigma_r \delta_r < (\varepsilon + \varkappa)(b - a) + (B - A)\varkappa$$
$$= \varepsilon(b - a) + \varkappa(b - a + B - A).$$

Durch gehörige Wahl der Zahlen ε und $\varkappa$ lässt sich die rechte Seite dieser Ungleichung jeder beliebigen Zahl ε' gleich machen. Die Function $f(x)$ ist mithin von $x = a$ bis $x = b$ integrirbar (Nr. 2).

Beweis des obigen Hilfssatzes. Da die Werthe der Function $f(x)$ für alle x im Intervalle (a, b) zwischen den nämlichen Zahlen A und B liegen, so sind die Unbestimmtheitsgrenzen $O(x)$ und $U(x)$ für jedes solche x bestimmte Zahlen. Dabei liegt $f(x)$ selbst zwischen $U(x)$ und $O(x)$, genauer, es ist

$$U(x) \leqq f(x) \leqq O(x) \tag{5}$$

(S. 173 Note). Es gehört ferner zu jedem $\varkappa > 0$ eine positive Zahl $\delta(x)$ derart, dass für jedes x' im Intervalle (a, b), wofür

$$|x' - x| < \delta(x)$$

ist,

$$U(x) - \varkappa < f(x') < O(x) + \varkappa \tag{6}$$

ist. Aus den Beziehungen (5) und (6) folgt, wenn man $O(x) - U(x) = D(x)$ setzt, dass

$$-D(x) - \varkappa < f(x') - f(x) < D(x) + \varkappa,$$

d. i.

$$|f(x') - f(x)| < D(x) + \varkappa \leqq \varepsilon + \varkappa \tag{7}$$

ist. Um die Zahl $\delta(x)$ vollständig zu bestimmen, setzen wir fest, dass, wenn dazu eine beliebige Zahl $\omega > 0$ gefügt wird, unter den Werthen im Intervalle

$$(x - \delta(x) - \omega,\ x + \delta(x) + \omega)$$

mindestens einer, x'', sich befinde, wofür

$$|f(x'') - f(x)| > \varepsilon + \varkappa$$

ist. — Es lässt sich nun zeigen, dass die positive Zahl $\delta(x)$, während x das Intervall (a, b) durchläuft, eine positive untere Grenze μ besitzt. Im Intervalle (a, b) giebt es mindestens einen Werth x_0, in dessen jeder Umgebung $\delta(x)$ die untere Grenze μ hat. Ersetzen wir in (6) x durch x_0, $\varkappa$ durch $\varkappa : 2$ und $\delta(x)$ durch δ_0, so finden wir, dass, wenn x, x' irgend zwei Werthe des Intervalles (a, b) bedeuten, wofür $|x - x_0|$ und $|x' - x_0|$ kleiner als δ_0 sind, alsdann

$$U(x_0) - \frac{\varkappa}{2} < f(x) < O(x_0) + \frac{\varkappa}{2},$$

$$U(x_0) - \frac{\varkappa}{2} < f(x') < O(x_0) + \frac{\varkappa}{2}$$

ist. Hieraus ergiebt sich, dass

$$|f(x') - f(x)| < D(x_0) + \varkappa \leqq \varepsilon + \varkappa \tag{8}$$

sein muss. Bezeichnet nun x irgend einen festen Werth im Intervalle

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\delta_0,\quad x_0 + \frac{1}{2}\delta_0\right) \tag{9}$$

und x' einen willkürlichen Werth im Intervalle

$$\left(x - \frac{1}{2}\delta_0,\quad x + \frac{1}{2}\delta_0\right),$$

so haben wir $|x - x_0| < \delta_0 : 2$ und $|x' - x_0| < \delta_0$. Für x und x' gilt demnach die Beziehung (8). Hieraus erkennen

wir, dass $\delta(x)$ nicht kleiner als $\delta_0 : 2$ sein kann. Da μ die untere Grenze ist für die Werthe von $\delta(x)$, während x das Intervall (9) durchläuft, so giebt es zu jedem $\sigma > 0$ einen Werth x'' in demselben derart, dass $\delta(x'') < \mu + \sigma$ ist. Es ist aber auch

$$\delta(x'') \geqq \delta_0 : 2,$$

somit

$$\delta_0 : 2 < \mu + \sigma,$$

woraus man bei der Willkürlichkeit von σ schliessen muss, dass $\delta_0 : 2 \leqq \mu$ ist. Die Zahl μ ist also sicher von Null verschieden. Es besteht demnach die Ungleichung

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon + \varkappa$$

für je zwei Werthe x, x' im Intervalle (a, b), deren Unterschied dem Betrage nach kleiner als μ ist.

3. Die in X. 5 d. I. T. aufgeführten Sätze über das einfache bestimmte Integral lassen sich auf das obere und untere Integral einer im Intervalle (a, b) endlichen Function übertragen. Die Sätze 1) und 2) gelten auch für diese Integrale, nur muss in 2) k positiv sein.

An Stelle des dritten Satzes tritt aber nunmehr der folgende: Sind die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_m(x)$ im Intervalle (a, b) von x endlich, so ist das obere Integral der Summe $f_1(x) + \cdots + f_m(x)$ nicht grösser als die Summe der oberen Integrale der Addenden, das untere Integral von $f_1(x) + \cdots + f_m(x)$ nicht kleiner als die Summe der unteren Integrale der Addenden.

Beweis. Wir können uns dabei auf zwei Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ beschränken, deren obere und untere Integrale bezw. mit G_1, K_1; G_2, K_2 bezeichnet seien. G, K bedeuten das obere und untere Integral von $f_1(x) + f_2(x)$. Ist

$$b - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n, \quad a_r = a_{r-1} + \delta_r$$

und sind g_r, g_{1r}, g_{2r} bezw. die oberen Grenzen der Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ im Intervalle (a_{r-1}, a_r) von x, so hat man

$$g_r \leqq g_{1r} + g_{2r}.$$

Daher ist nach (12) auf S. 355 d. I. B.

$$\leqq \sum_r g_r \delta_r \leqq \sum_r g_{1r} \delta_r + \sum_r g_{2r} \delta_r. \tag{a}$$

Da nun

$$\lim_{\delta_r=0}\sum_r g_{1r}\delta_r = G_1 \qquad \lim_{\delta_r=0}\sum_r g_{2r}\delta_r = G_2$$

ist, so können wir zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Theilchen δ_r von solcher Kleinheit finden, dass

$$G_1 \leqq \sum_r g_{1r}\delta_r < G_1 + \varepsilon \qquad G_2 \leqq \sum_r g_{2r}\delta_r < G_2 + \varepsilon$$

ist. Somit ist nach (a)

$$G < G_1 + G_2 + 2\varepsilon,$$

woraus sich wegen der Willkürlichkeit von ε die angekündigte Beziehung

$$G \leqq G_1 + G_2$$

ergiebt. Auf ähnliche Art erweist man den zweiten Theil des obigen Satzes.

Satz. „Ist die eindeutige Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) endlich und liegt c zwischen a und b, so ist das obere Integral von $f(x)$ über das Intervall (a, b) gleich der Summe der oberen Integrale von $f(x)$ in den Intervallen (a, c) und (c, b):

$$(G=)\int_a^{(1)b} f(x)dx = \int_a^{(1)c} f(x)dx + \int_c^{(1)b} f(x)dx \quad (a<c<b). \tag{b}$$

Desgleichen besteht zwischen den unteren Integralen der Function $f(x)$ über die in Rede stehenden Intervalle die Beziehung:

$$(K=)\int_a^{(2)b} f(x)dx = \int_a^{(2)c} f(x)dx + \int_c^{(2)b} f(x)dx.\text{“} \tag{c}$$

Beweis. Lassen wir c zu den zwischen a und b eingeschalteten Werthen gehören und $c - a$ in die Strecken $\delta_1 \ldots \delta_m$, $b - c$ in die Strecken $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ zerfallen, bezeichnen wir dann die obere Grenze von $f(x)$ im Intervalle δ_r mit g_r, im Intervalle ε_r mit h_r, so haben wir

$$G = \lim_{\delta_r=0}\sum_1^m g_r\delta_r + \lim_{\varepsilon_r=0}\sum_1^n h_r\varepsilon_r.$$

Diese Formel stimmt mit (b) überein. — Auf ähnliche Weise gelangt man zur Formel (c).

Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich unmittelbar der weitere, dass, wenn die im Intervalle (a, b) endliche Function $f(x)$ ein bestimmtes Integral über dasselbe zulässt, das Nämliche gilt bezüglich der Intervalle (a, c) und (c, b) und dass

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{d}$$

ist. — In der That folgt aus der Gleichung $G = K$ nach (b) und (c)

$$\int_a^{(1)c} f(x)dx + \int_c^{(1)b} f(x)dx = \int_a^{(2)c} f(x dx + \int_c^{(2)b} f(x)dx \tag{e}$$

nothwendig

$$\int_a^{(1)c} f(x)dx = \int_a^{(2)c} f(x)dx, \quad \int_c^{(1)b} f(x)dx = \int_c^{(2)b} f(x)dx.$$

Denn wäre auch nur

$$\int_a^{(1)c} f(x)dx > \int_a^{(2)c} f(x)dx,$$

so wäre die linke Seite von (e) grösser als die rechte.

4. Zu diesen Sätzen fügen wir noch den folgenden:

„Auf der Strecke (a, b) sei ein discretes Punktsystem $\mathfrak{M}$ gegeben. Wir schliessen die Punkte desselben in ein System von Strecken so ein, dass in den nach Wegnahme derselben zurückbleibenden Theilen von (a, b) gar kein Punkt von $\mathfrak{M}$, weder im Innern noch an den Grenzen, mehr vorhanden ist. Die ersteren Strecken seien mit $\delta_1 \ldots \delta_n$ und ihre dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte mit $a_1 \ldots a_n$, die letzteren mit $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_n}$ und ihre dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte mit $b_1 \ldots b_{k_n}$ bezeichnet. Bedeutet alsdann $f(x)$ eine für jeden Punkt des Intervalles (a, b) eindeutige und im ganzen Intervalle endliche Function, so hat man für das obere Integral derselben im Intervalle (a, b) die Formel

$$(G =) \int_a^{(1)b} f(x)dx = \lim_{\sigma=0} \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)dx, \tag{f}$$

d. h. jedem $\varepsilon > 0$ entspricht ein $\delta > 0$ so, dass

$$\left| G - \sum_r \int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

ist für jedes System $\delta_1 \ldots \delta_n$, welches der Bedingung

$$\sigma = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n < \varepsilon$$

genügt. — Ebenso hat man für das untere Integral von $f(x)$

$$\int_a^{(2)\,b} f(x)\,dx = \lim_{\sigma=0} \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(2)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)\,dx.\text{“} \qquad \text{(g)}$$

Die Gleichung (f) folgt ohne Weiteres aus der Formel

$$\int_a^{(1)\,b} f(x)\,dx = \sum_1^{n}{}_r \int_{a_r}^{(1)\, a_r + \delta_r} f(x)\,dx + \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)\,dx.$$

Es ist nämlich für jedes x im Intervalle (a, b) $|f(x)|$ kleiner als eine Constante C, somit

$$\left| \sum_1^{n}{}_r \int_{a_r}^{(1\; a_r + \delta_r} f(x)\,dx \right| < C\sigma,$$

d. i. kleiner als ε, wenn man sich nur $\sigma < \varepsilon : C$ denkt.

Aus den Formeln (f) und (g) ergiebt sich unmittelbar der Satz: „Wenn die für jeden Punkt des Intervalles (a, b) eindeutige und im ganzen Intervalle endliche Function $f(x)$ integrirbar ist über jeden Theil von (a, b), der keinen Punkt einer discreten Menge $\mathfrak{M}$ enthält, so ist sie integrirbar über das ganze Intervall (a, b).“

Nunmehr erscheint auf der rechten Seite sowohl der Formel (f) als auch von (g) hinter dem Σ

$$\int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\,dx;$$

es sind somit die rechten Seiten dieser Formeln einander gleich. Daher sind auch die linken Seiten derselben, d. i. das obere und untere Integral der Function $f(x)$ im Intervalle (a, b), einander gleich. Diese Function ist also über dieses Intervall integrirbar.

III. Der allgemeine Begriff des absolut convergenten einfachen bestimmten Integrals über ein endliches Intervall (X.10).[1])

1. **I. Fall.** Die Function wechselt im Integrationsintervall ihr Zeichen nicht. Die folgende Entwickelung beruht auf dem nachstehenden Satze.

Satz. „In jedem Punkte eines endlichen Intervalles (a, b) (wobei $a < b$ ist), mit Ausnahme einer discreten, endlichen oder unendlichen Menge $\mathfrak{M}$, sei die Function $f(x)$ eindeutig definirt und zwar nehme sie Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen nicht an, es sei also z. B. überall $f(x) \geqq 0$. Diese Function sei in dem Intervalle (a, b) nicht endlich, dagegen soll sie in jedem Theile desselben, welcher keinen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ enthält, endlich und integrirbar sein. Ueber die Menge $\mathfrak{M}$ wird eine Schaar von Strecken $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ in der Weise ausgebreitet, dass nach Entfernung derselben aus dem Intervalle (a, b) nur Theile desselben übrig bleiben, welche keinen Punkt von $\mathfrak{M}$, weder im Innern noch an den Enden, enthalten. Diese Theile seien der Reihe nach mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$ $(k_n \leqq n+1)$ bezeichnet und die Abscissen ihrer dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte mit $b_1 b_2 \ldots b_{k_n}$ bezeichnet."

„Zufolge des Umstandes, dass die Menge $\mathfrak{M}$ discret ist (S. 264), kann die positive Summe

$$\sigma = \delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n \tag{1}$$

beliebig kleine Werthe annehmen."

„Die nicht-negativen Summen

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx \; (= S) \tag{2}$$

haben, während den $\delta_1 \ldots \delta_n$ alle dem Vorstehenden zufolge möglichen Werthe beigelegt werden, zur oberen Grenze ent-

1) Vgl. die Abhandlung des Verfassers in den Sitzungsberichten d. k. Acad. zu Wien, Jahrg. 1898 S. 207 flg., C. Severini, Sulle funzioni di variabile reale rappresentate da integrali definiti Palermo 1899 S. 10. Ch. de la Vallée-Poussin hat in der auf S. 124 angeführten Abhandlung die absolute Convergenz der bestimmten Integrale, der einfachen sowohl, als der mehrfachen, auf eine andere Weise erklärt, so dass wir jetzt zwei in ihren Ergebnissen durchaus übereinstimmende Theorien derselben besitzen.

weder $+\infty$ oder eine endliche Zahl $J \geqq 0$. Im letzteren Falle ist J der Grenzwerth der Summe (2) bei $\lim \sigma = 0$, d. h. jedem positiven ε entspricht ein positives δ so, dass, wenn nur die Summe σ aller δ_r kleiner als δ ist, dann stets

$$0 \leqq J - S < \varepsilon \tag{3}$$

ist. Wir erklären die Zahl J als das Integral der Function $f(x)$ im Intervalle (a, b), was wir kurz durch die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\sigma=0} \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx \tag{4}$$

andeuten.“

Beweis. Wir nehmen an, dass jede Summe (2) unter der nämlichen positiven Zahl C liegt.

a) Zunächst betrachten wir nur eine unbegrenzte Reihe solcher Bedeckungen $\mathfrak{T}_1\, \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_m \ldots$ der Punktmenge $\mathfrak{M}$, dass die Summe der $\mathfrak{T}_m$ gehörigen Strecken kleiner als eine beliebig gegebene Zahl Δ ausfällt, wenn nur m gross genug gewählt wird, und zwar Bedeckungen von der Art, dass jede zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ gehörige Strecke völlig in einer zu $\mathfrak{T}_m$ gehörigen liegt. Die $\mathfrak{T}_m$ ausmachenden Strecken seien

$$\delta_{m1}, \delta_{m2} \ldots \delta_{m, n_m}. \tag{5}$$

Nach Wegnahme der Segmente (5) mögen vom Intervalle (a, b) die Strecken

$$\varepsilon_{m1}, \varepsilon_{m2} \ldots \varepsilon_{m, p_m} \quad (p_m \leqq n_m + 1)$$

übrig bleiben, welche gar keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten. Ihre dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte haben beziehungsweise die Abscissen $x = b_{m1} \ldots b_{m, p_m}$.

Wir bilden die Summe

$$\Sigma_m = \sum_1^{p_m} {}_r \int_{b_{m,r}}^{b_{m,r}+\varepsilon_{m,r}} f(x)\,dx \tag{6}$$

und bemerken sofort, dass Σ_m bei wachsendem m nicht abnehmen kann. Zu den Strecken $\varepsilon_{m,r}$ treten nämlich beim Uebergange von der Bedeckung $\mathfrak{T}_m$ zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ diejenigen Unterabtheilungen der $\delta_{m1} \ldots \delta_{m, n_m}$ hinzu, welche gar keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten. Somit erscheinen in Σ_{m+1} alle Glieder von

Σ_m wieder und ausserdem vielleicht neue. Da keines von allen negativ ist, so hat man also

$$\Sigma_{m+1} \geqq \Sigma_m. \tag{7}$$

Es ist jedoch bei jedem m $\Sigma_m < C$, somit hat Σ_m bei $\lim m = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth J. Dabei ist

$$\lim_{m=+\infty} \Sigma_m = J \text{ und } J \geqq \Sigma_m. \tag{8}$$

Somit lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ so zuordnen, dass, wenn nur $m > \mu$ ist, alsdann

$$0 \leqq J - \Sigma_m < \varepsilon \quad \text{oder} \quad J < \Sigma_m + \varepsilon \tag{9}$$

ist.

b) Wie die Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ auch gewählt werden mögen, die Summe (2), die wir kurz mit S bezeichnen, kann nicht grösser als die soeben gewonnene Zahl J sein. Dies besagt dann in Verbindung mit der Beziehung (9), dass J die obere Grenze für alle möglichen Summen (2) ist.

Die Ungleichung $J \geqq S$ ergiebt sich leicht durch die Bemerkung, dass nach (8)

$$S - J \leqq S - \Sigma_m \tag{10}$$

ist und dass sich jedem $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen m so zuordnen lassen, dass

$$S - \Sigma_m < \varepsilon \tag{11}$$

ausfällt. Dann hat man nach (10) $S - J < \varepsilon$; also ist in der That $S \leqq J$.

Die Formel (11) wird folgendermassen bewiesen. Wir denken uns auf der Strecke (a, b) neben den Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ das Streckensystem (5) zunächst bei willkürlichem m aufgetragen. Die beiden dadurch entstehenden Streckensysteme $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_n}$ und $\varepsilon_{m,1} \ldots \varepsilon_{m,p_m}$ haben eine Reihe von Theilen der Strecke (a, b) gemein. Die ausserdem noch vorhandenen Theile der Strecken ε_r gehören den Strecken (5)', die der Strecken $\varepsilon_{m,r}$ den Strecken δ_r an. Zerlegen wir nun die Integrale, aus denen S besteht, in die Integrale von $f(x)$ über die auf diese Art erhaltenen Theile der Intervalle ε_r und die, aus denen Σ_m besteht, in die Integrale von $f(x)$ über die ebenso erhaltenen Theile der Intervalle $\varepsilon_{m,r}$, so fallen aus der Differenz $S - \Sigma_m$ die Integrale von $f(x)$ über die den

beiden Systemen von Strecken gemeinsamen Theile aus. Die noch übrigen Glieder der so umgestalteten Summe Σ_m lassen wir weg. Die Summe der noch vorhandenen Glieder der in der soeben erwähnten Weise aufgelösten Summe S ist, da die Function $f(x)$ in den Strecken $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{t_n}$ endlich ist, also unter einer Constanten $H > 0$ liegt, kleiner als $H \sum^r \delta_{m,r}$. Wir finden daher

$$S - \Sigma_m < H \sum_1^{p_m}{}^r \delta_{m,r}. \tag{12}$$

Nun können wir m so gross annehmen, dass $\sum^r \delta_{m,r}$ kleiner als $\varepsilon : H$ ist. Hierdurch folgt aus (12) die Formel (11).

c) Jetzt ist noch zu zeigen, dass thatsächlich im Sinne der obigen Erklärung

$$\lim_{\sigma = 0} S = J \tag{13}$$

ist. Verstehen wir jetzt unter m eine bestimmte ganze Zahl, nur so gewählt, dass die Ungleichung (9) gilt, so haben wir nach (9)

$$0 \leqq J - S < (\Sigma_m - S) + \varepsilon. \tag{14}$$

Wenn wir H_m eine solche Constante sein lassen, dass $0 \leqq f(x) < H_m$ ist für jedes x in einem der Intervalle

$$(b_{m,r}, b_{m,r} + \varepsilon_{m,r}) \qquad (r = 1, 2 \ldots p_m),$$

so können wir aus (12) durch Vertauschung der Streckensysteme $\delta_1 \ldots \delta_n$ und (5) die Ungleichung

$$\Sigma_m - S < H_m \sum_1^n{}^r \delta_r \tag{15}$$

ableiten. Zufolge des Charakters der Menge $\mathfrak{M}$ lässt sich der Zahl $\varepsilon : H_m$ ein System von Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ zuordnen, deren Summe

$$\sigma = \sum_1^n{}^r \delta_r < \varepsilon : H_m$$

ist. Unter der nämlichen Voraussetzung über σ ergiebt sich also aus (14) und (15) die Beziehung

$$0 \leqq J - S < 2\varepsilon.$$

Dies kommt auf die Formel (13) hinaus.

2. **II. Fall.** Die Function wechselt ihr Zeichen innerhalb des Integrationsintervalles.

Wir lassen jetzt unter Aufrechthaltung der übrigen Eingangs der vorigen Nummer über die Function $f(x)$ gemachten Annahmen die fallen, dass sie ihr Zeichen im Intervalle (a, b) nicht wechselt. Auch dann könnten wir den Grenzwerth J auf die nämliche Weise erklären, wie es a. a. O. geschehen ist. In der That hat der Erfinder desselben, A. Harnack, keine weitere Beschränkung als die soeben angeführte aufgenommen.[1]) Allein wir vermögen aus diesen Angaben und Festsetzungen allein nicht nachzuweisen, dass wir über den Grenzwerth J alles das aussagen können, was von einem bestimmten Integral verlangt wird. Es lässt sich daraus nicht einmal der Satz ableiten, dass die Function $f(x)$ auch in jedem Intervalle (a, c), wo $a < c < b$ ist, ein uneigentliches Integral zulässt. Dies geht aber an, wenn auch der absolute Betrag $|f(x)|$ im Intervalle (a, b) im Sinne von Nr. 1 integrirbar ist. Wir müssen also hier von dem folgenden Satze ausgehen.

Satz. „Es sei die Function $f(x)$ so beschaffen wie im Satze von Nr. 1, nur möge sie im Intervalle (a, b) Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen annehmen. Wenn dann ihr absoluter Betrag $|f(x)|$ ein uneigentliches Integral im Intervalle (a, b) zulässt, so hat die Summe (2) auf S. 273 bei $\lim \sigma = 0$ ebenfalls einen endlichen Grenzwerth J, d. h. jedem $\varepsilon > 0$ entspricht ein $\delta > 0$ so, dass, wenn nur die Summe σ aller δ_r kleiner als δ ist, dann stets

$$\left| J - \sum_1^{k_n} {}^r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \tag{16}$$

ist. Dieser Grenzwerth soll als das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet werden und zwar als absolut convergentes.“

Beweis. Wir führen zwei neue Functionen $f_1(x), f_2(x)$ ein durch die folgende Erklärung. In allen Punkten x des Inter-

1) Vgl. Math. Ann. Bd. 21 S. 325, Bd. 24 S. 220.

valles (a, b), wo $f(x) > 0$ ist, sei $f_1(x) = f(x)$, in den übrigen sei $f_1(x) = 0$; dagegen sei $f_2(x) = -f(x)$, für alle Punkte x von (a, b), wo $f(x) < 0$ ist, $f_2(x) = 0$ für die übrigen. Dann hat man in jedem Punkte x von (a, b)

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \qquad |f(x)| = f_1(x) + f_2(x). \tag{17}$$

$f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind endlich und integrirbar[1]) in jedem Theile des Intervalles (a, b), zu dem kein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ gehört. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ lassen aber auch je ein Integral über das ganze Intervall (a, b) zu. Dies folgt unmittelbar aus dem Satze der vorigen Nummer, da die nicht-negativen Summen

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_1(x)\,dx \qquad \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_2(x)\,dx$$

beide vermöge der zweiten der Gleichungen (17) kleiner als die Summe

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx$$

sind, folglich beide, wie diese letzte Summe, eine endliche obere Grenze besitzen, wenn den $\delta_1 \ldots \delta_n$ alle nach S. 273 möglichen Werthe beigelegt werden.

Zufolge der ersten der Gleichungen (17) hat man

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx = \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_1(x)\,dx - \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_2(x)\,dx. \tag{18}$$

Der Minuend und Subtrahend rechts haben nach dem gerade Bemerkten bei $\lim \sigma = 0$ je einen endlichen Grenzwerth, folglich hat einen solchen auch die linke Seite von (18). Und zwar besteht die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

1) Dies beruht auf dem Umstande, dass in jedem Intervalle von x, wo $f(x)$ endlich ist und sein Zeichen wechselt, die Schwankung von $f_1(x)$, sowie die von $f_2(x)$ kleiner ist als die von $f(x)$.

3. **Nachweis, dass der in Nr. 2 aufgestellte Grenzwerth, wovon der in Nr. 1 ein besonderer Fall ist, die Eigenschaften eines bestimmten Integrals besitzt.** Dieselben lassen sich auf die nachstehenden Sätze zurückführen. Die darin vorkommende Function $f(x)$ hat die im Satze der Nr. 2 angegebenen Eigenschaften, namentlich die, dass ihr absoluter Betrag $|f(x)|$ ein Integral über das Intervall (a, b) zulässt.

I. Satz. „Liegt c zwischen a und b, so lässt die Function $f(x)$ sowohl über das Intervall (a, c), als auch über (c, b) ein absolut convergentes Integral zu, und zwar hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.\text{“} \qquad (a)$$

Beweis. Der Punkt $x = c$ gehört entweder zu einer Strecke δ_r oder er liegt im Innern einer Strecke ε_r. Im letzteren Falle zerlegt er sie in zwei Theile. Nehmen wir jeden von ihnen für sich unter die Strecken $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_n}$, in welchen kein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ sich befindet (siehe S. 273), auf, so zerfallen dieselben in dem einen, wie in dem anderen Falle in zwei Gruppen: $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q_n}$ im Intervalle (a, c) und $\varepsilon_{q_n+1} \ldots \varepsilon_{k_n}$ im Intervalle (c, b) gelegen. Man hat nun

$$\sum_1^{q_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx \leqq \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx,$$

$$\sum_{q_n+1}^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx \leqq \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichungen zufolge der Voraussetzung stets unter einer endlichen Zahl liegt, so gilt das Nämliche von der linken. Daher sind die Integrale

$$\int_a^c |f(x)|\,dx, \qquad \int_c^b |f(x)|\,dx$$

vorhanden, somit auch die Integrale

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x)dx.$$

Aus der Beziehung

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx = \sum_1^{q_n}{}_r f(x)\,dx + \sum_{q_n+1}^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx$$

erschliesst man durch den Grenzübergang $\lim \sigma = 0$ die Formel (a), weil die Summe derjenigen unter den Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$, welche im Intervalle (a, c) liegen, sowie derjenigen unter ihnen, welche im Intervalle (c, b) liegen, zugleich mit σ zur Null convergirt.

II. Satz.[1]) „Es seien durch eine besondere Vorschrift gewisse Strecken $\eta_1\,\eta_2 \ldots \eta_m$ aus dem Intervalle (a, b) herausgehoben, deren dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte die Abscissen $x = e_1, e_2 \ldots e_m$ besitzen. Wenn alsdann die Summe

$$\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m \tag{b}$$

zum Grenzwerthe Null convergirt, so gilt das Nämliche auch von der Summe der Integrale

$$\sum_1^m{}_r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx, \tag{c}$$

d. h. jedem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ entspricht ein $\delta > 0$ so, dass, wenn nur die Summe $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m$ kleiner als δ ist, dann stets

$$\left| \sum_1^m{}_r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \tag{d}$$

ist."

Beweis. 1. Fall. Fallen die η_r, indem $m = n$ ist, der Reihe nach mit den in Nr. 1 eingeführten Strecken $\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_n$ zusammen, so ergiebt sich die Beziehung (d) einfach aus der Erklärung (16) auf S. 277. Bedeuten nämlich $a_1\,a_2 \ldots a_n$ der Reihe nach die Abscissen der dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte der Intervalle $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, so ist nach dem 1. Satze

$$J = \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx + \sum_1^n{}_r \int_{a_r}^{a_r+\delta_r} f(x)\,dx.$$

Setzt man diesen Ausdruck für J in die Ungleichung (16), so findet man, dass, wenn nur $\delta_1 + \cdots + \delta_n < \delta$ ist, alsdann

1) Vergl. de la Vallée-Poussin, a. a. O. Nr. 15.

$$\left| \sum_1^n {}_r \int_{a_r}^{a_r+\delta_r} f(x)dx \right| < \varepsilon \tag{e}$$

ist, w. z. b. w. — Neben der Beziehung (e) besteht zufolge der Voraussetzung, dass $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ebenfalls existirt, auch die folgende. Es ist

$$Z = \sum_1^n {}_r \int_{a_r}^{a_r+\delta_r} |f(x)|\,dx < \varepsilon, \tag{f}$$

wenn nur $\delta_1 + \cdots + \delta_n$ kleiner ist als eine gewisse Zahl, die wir zum Unterschiede vom obigen δ mit Δ bezeichnen wollen.

2. Fall. Fallen die Strecken $\eta_1 \ldots \eta_m$ nicht paarweise mit den Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ zusammen, so seien $\vartheta_1\,\vartheta_2 \ldots \vartheta_{p_m}$ jene Theile der Strecken η_r, welche sie mit dem System der Strecken $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_n}$ gemein haben. In den Strecken ε_r ist die Function $f(x)$ durchaus endlich, d. h. es giebt eine positive Zahl H derart, dass, wenn x einen Punkt irgend eines der ε_r bezeichnet,

$$|f(x)| < H$$

ist. Demnach hat man sicher

$$\left| \sum_1^m {}_r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx \right| < H \sum_1^{p_m} {}_r \vartheta_r + Z. \tag{g}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung lässt sich der Satz II auch im vorliegenden Falle erweisen. Wir wählen zunächst eine Reihe von Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ aus, welche das Punktsystem $\mathfrak{M}$ völlig bedecken und dabei eine kleinere Summe als Δ liefern, so dass nach (f) $Z < \varepsilon$ ist. Für die Strecken ε_r, die von $b - a$ nach Wegnahme dieser δ_r übrig bleiben, ermittelt man die Zahl H. Nun ist

$$\sum_1^{p_m} {}_r \vartheta_r \leqq \sum_1^m {}_r \eta_m;$$

werden jetzt die η_r nur so angenommen, dass ihre Summe kleiner ist als $\varepsilon : H$, so ist nach (g) stets

$$\left| \sum_1^m {}_r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx \right| < 2\varepsilon.$$

Damit ist der Beweis des Satzes II vollständig erbracht.

III. Satz. „Fügen wir zur discreten Punktmenge $\mathfrak{M}$ eine zweite $\mathfrak{N}$ im Intervalle (a, b), welche ebenfalls den Inhalt Null hat, so entsteht darin eine dritte discrete Menge $\mathfrak{P}$ von Punkten, zu deren vollständiger Bedeckung die Strecken $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m$ erforderlich seien. Bezeichnen dann $\varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_{q_m}$ die Strecken, welche vom Intervalle (a, b) nach Wegnahme der ζ_r übrig bleiben, also keinen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthalten, und $i_1\, i_2 \ldots i_{q_m}$ die Abscissen der dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte derselben, so lässt sich das Integral J mit Hilfe dieser Zahlen in gleicher Weise erklären, wie oben mittelst der Zahlen ε_r und b_r, d. i. man hat, wenn $\zeta_1 + \ldots \zeta_m = \tau$ gesetzt wird,

$$J = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\tau = 0} \sum_1^{q_m} {}_r \int_{i_r}^{i_r + \varkappa_r} f(x)\, dx.\text{“} \tag{h}$$

Beweis. $\delta_1 \ldots \delta_n$ seien wie bisher Strecken, welche die Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ vollständig bedecken. Fallen bei beliebigem $n = m$ in sie der Reihe nach die Strecken ζ_r hinein, so ist der dritte Ausdruck in (h) mit dem Subtrahend in (16) in Nr. 2 identisch. Wenn aber bei gehöriger Kleinheit aller δ_r zu diesen noch andere Strecken λ_r treten müssen, um die Punkte der Menge $\mathfrak{P}$ völlig zu bedecken, d. i. um ein System von Strecken ζ_r zu liefern, so liegen die λ_r innerhalb der in Nr. 1 eingeführten Strecken $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$. Somit fällt entweder irgend ein $\varkappa_r$ mit einem ε_r zusammen oder ist Theil eines solchen. Zerlegen wir nun jedes Glied der Summe

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx \tag{i}$$

in die den Theilen des betreffenden ε_r entsprechenden Integrale, so müssen wir, um auf die in (h) stehende Summe zu kommen, aus der so umgestalteten Summe die zu den Strecken λ_r gehörigen Integrale weglassen. Da aber die Summe der λ_r bei $\lim \tau = 0$ den Grenzwerth Null hat, weil die Menge $\mathfrak{N}$ discret ist, so hat die Summe jener Glieder von (i) zufolge des vorhergehenden Satzes bei $\lim \tau = 0$ den Grenzwerth Null. Daher ist der Grenzwerth von (i) bei $\lim \sigma = 0$ gleich dem der Summe

$$\sum_1^{q_m}{}_r \int_{i_r}^{i_r + \varkappa_r} f(x)\, dx$$

bei $\lim \tau = 0$.

IV. Satz. „Hat die Function $g(x)$ ähnliche Eigenschaften im Intervalle (a, b) wie die $f(x)$, d. i. ist sie endlich und integrirbar in allen Theilen desselben, welche keinen Punkt einer discreten Menge $\mathfrak{N}$ enthalten, und ist

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

absolut convergent, so ist $f(x) + g(x)$ endlich und integrirbar in allen Theilen des Intervalles (a, b), welche keinen Punkt der durch Vereinigung der Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ entstehenden Menge $\mathfrak{P}$ enthalten, und es convergirt das Integral

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\, dx$$

absolut. Dabei ist

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx. \text{“} \qquad \text{(k)}$$

Sind die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ identisch, so ist der Satz IV unmittelbar einleuchtend. Er ergiebt sich nämlich aus der Formel

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} \{f(x) + g(x)\}\, dx$$

$$= \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx + \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} g(x)\, dx$$

durch den Grenzübergang $\lim (\delta_1 + \cdots + \delta_n) = 0$. Der andere Fall, dass die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nicht identisch sind, lässt sich mit Hilfe des Satzes III sofort auf den soeben behandelten zurückführen.

Hier möge noch die folgende wichtige Bemerkung Platz finden. „Es sei die Function $f(x)$ für jeden Werth des Intervalles (a,b) eindeutig definirt, in demselben endlich und integrirbar von $x = a$ bis $x = b$. Leitet man aus $f(x)$ eine zweite Function $f_1(x)$ dadurch ab, dass man blos in den Punkten einer discreten unendlichen Menge $\mathfrak{M}$ die Werthe von $f(x)$ durch

andere, welche nicht mehr zwischen endlichen Grenzen liegen, ersetzt, so lässt $f_1(x)$ ein absolut convergentes Integral von $x = a$ bis $x = b$ zu und zwar ist

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.\text{“}$$

Beweis. Mit Benutzung der auf S. 273 und 277 eingeführten Bezeichnungen hat man

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_1^n{}^r \int_{a_r}^{a_r+\delta_r} f(x)\,dx + \sum_1^{k_n}{}^r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx$$

$$= \sum_1^n{}^r \int_{a_r}^{a_r+\delta_r} f(x)\,dx + \sum_1^{k_n}{}^r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_1(x)\,dx. \qquad (1)$$

Das erste Glied rechts, dessen Betrag, da für jedes x im Intervalle (a, b) $|f(x)| < C$ ist, kleiner ist als $C(\delta_1 + \cdots + \delta_n) = C\sigma$, hat also bei $\lim \sigma = +0$ den Grenzwerth Null. Wir können demnach aus (1) schliessen, dass

$$\lim_{\sigma=0} \sum_1^{k_n}{}^r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_1(x)\,dx = J$$

ist. Auf die nämliche Art findet man aber auch die Formel

$$\lim_{\sigma=0} \sum_1^{k_n}{}^r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f_1(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

womit der Satz bewiesen ist.

4. Zurückführung der älteren Erklärungen von absolut convergenten Integralen über ein endliches Intervall auf die neue in Nr. 1 und 2.

Schrumpft die Menge $\mathfrak{M}$ auf einen der Endpunkte des Intervalles (a, b) z. B. $x = a$ zusammen, so brauchen wir nur eine Strecke $\delta_1 = \xi$ und es geht der in Nr. 1 und 2 eingeführte Grenzwerth J (falls er einen Sinn hat) in

$$\lim_{\xi=+0} \int_{a+\xi}^b f(x)\,dx$$

über. Durch diesen Grenzwerth ward aber das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ in dem in Rede stehenden Falle früher

erklärt (vgl. X. 7). Wenn die Menge $\mathfrak{M}$ aus dem einzigen Punkte $x=c$ zwischen $x=a$ und $x=b$ besteht, so benöthigen wir zur Ausschliessung desselben zweier Strecken $\delta_1=\xi$, $\delta_2=\eta$, welche in ihm zusammenstossen. Nun muss die Beziehung (3) auf S. 274 bezw. (16) auf S. 277 bestehen, wenn nur $0<\xi+\eta<\delta$ ist. Das ist gewiss erfüllt, wenn wir uns sowohl ξ als auch η kleiner als $\delta:2$ denken. Es ist demnach in diesem Falle

$$J=\lim_{\xi+\eta=+0}\left\{\int_a^{c-\xi} f(x)\,dx+\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx\right\},$$

wofür man indess, wie wir sogleich zeigen werden,

$$J=\lim_{\xi=+0}\int_a^{c-\xi} f(x)\,dx+\lim_{\eta=+0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \tag{m}$$

schreiben darf. Wir erhalten also auch jetzt aus J den früher auf S. 382 d. I. T. für $\int_a^b f(x)\,dx$ aufgestellten Ausdruck. Umgekehrt lässt sich die rechte Seite der Formel (m) stets als Grenzwerth

$$\lim_{\xi+\eta=+0}\left\{\int_a^{c-\xi} f(x)\,dx+\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx\right\}$$

ansehen.

Hat eine reelle Function von der Form $\varphi(\xi)+\psi(\eta)$ bei $\lim(\xi+\eta)=+0$ einen endlichen Grenzwerth J, so gehört zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ so, dass, wenn nur $\xi+\eta$ kleiner als δ ist,

$$J-\varepsilon<\varphi(\xi)+\psi(\eta)<J+\varepsilon \tag{m*}$$

ist. Daraus folgt zunächst, dass die Function $\varphi(\xi)$ im Intervalle $(0, \frac{1}{2}\delta)$ von ξ, die Function $\psi(\eta)$ im Intervalle $(0, \frac{1}{2}\delta)$ von η endlich ist. Denn denken wir uns in (m*) für η einen constanten Werth kleiner als $\delta:2$ gesetzt, so finden wir

$$J-\varepsilon-\psi(\eta)<\varphi(\xi)<J+\varepsilon-\psi(\eta).$$

Aehnlich schliessen wir bezüglich der Function $\psi(\eta)$. Es hat somit sowohl $\varphi(\xi)$ bei $\lim\xi=+0$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen, als auch $\psi(\eta)$ bei $\lim\eta=+0$. Bezeichnen wir die ersteren mit O, U, die letzteren mit O', U', so können wir zeigen, dass einerseits $J=O+O'$, andererseits $J=U+U'$ ist. Nun giebt es nämlich mindestens einen Werth ξ' kleiner als $\delta:2$, wofür

$$O-\varepsilon<\varphi(\xi')<O+\varepsilon,$$

und mindestens einen η' kleiner als $\delta:2$, wofür

$$O' - \varepsilon < \psi(\eta') < O' + \varepsilon$$

ist.[1]) Wir haben also

$$O + O' - 2\varepsilon < \varphi(\xi') + \psi(\eta') < O + O' + 2\varepsilon.$$

Da auch die Beziehung (m*) für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ richtig bleibt, so können wir aus ihr und den letzten Ungleichungen folgern, dass

$$J - \varepsilon < O + O' + 2\varepsilon \quad O + O' - 2\varepsilon < J + \varepsilon, \quad \text{d. i.} \quad |O + O' - J| < 3\varepsilon$$

ist. Weil ε jede beliebige positive Zahl sein darf, so müssen wir hieraus schliessen, dass $J = O + O'$ ist. Auf die nämliche Weise ergiebt sich, dass $J = U + U'$ ist. Mithin ist $O + O' = U + U'$, was bei dem Umstande, dass $O \geqq U$, $O' \geqq U'$ sein soll, nur in der Art möglich ist, dass $O = U$, $O' = U'$ ist. Es hat demnach $\varphi(\xi)$ bei $\lim \xi = +0$, $\psi(\eta)$ bei $\lim \eta = +0$ einen endlichen Grenzwerth und die Summe der beiden ist gleich J.[2]) — Sind umgekehrt die beiden Grenzwerthe

$$\lim_{\xi = +0} \varphi(\xi) = \alpha \qquad \lim_{\eta = +0} \psi(\eta) = \beta$$

gegeben, so entspricht jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass, wenn $0 < \xi < \delta$ und $0 < \eta < \delta$ ist,

$$|\varphi(\xi) - \alpha| < \varepsilon \qquad |\psi(\eta) - \beta| < \varepsilon$$

ist. Daher ist, falls nur $\xi + \eta < \delta$ ist, sicher

$$|(\varphi(\xi) + \psi(\eta)) - (\alpha + \beta)| < 2\varepsilon,$$

d. h. es ist

$$\alpha + \beta = \lim_{\xi + \eta = +0} \{\varphi(\xi) + \psi(\eta)\}.$$

Wird die Menge $\mathfrak{M}$ blos von h Punkten $x = c_1, c_2 \cdots c_h$, welche zwischen den Punkten $x = a$ und $x = b$ liegen, gebildet, so ergiebt sich auf ähnliche Weise für den Grenzwerth J im Falle, dass er existirt, der Ausdruck

$$J = \lim_{\xi_1 = +0} \int_a^{c_1 - \xi_1} f(x)\,dx +$$

$$\sum_1^{h-1}{}_r \left\{ \lim_{\eta_r = +0} \int_{c_r + \eta_r}^{d_r} f(x)\,dx + \lim_{\xi_{r+1} = 0} \int_{d_r}^{c_{r+1} - \xi_{r+1}} f(x)\,dx \right\}$$

$$+ \lim_{\eta_h = +0} \int_{c_h + \eta_h}^{b} f(x)\,dx, \qquad \text{(n)}$$

worin d_r einen willkürlichen Werth zwischen c_r und c_{r+1} $(r = 1 \ldots h - 1)$ bedeutet. Derselbe ist auch früher schon als

1) Vgl. Allgemeine Arithmetik I. S. 162.

2) Den besonderen Fall dieses Satzes, dass $\varphi(\xi) - \varphi(\eta)$ bei $\lim \xi = 0$, $\lim \eta = 0$ den Grenzwerth Null hat, behandelt Osgood in der Schrift: „Introduction to infinite series" (1897) S. 64.

das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet worden. Umgekehrt darf man die rechte Seite, falls sie existirt, stets als Grenzwerth der Summe

$$\int_a^{c_1-\xi_1} f(x)\,dx + \sum_1^{h-1} r\left[\int_{c_r+\eta_r}^{d_r} f(x)\,dx + \int_{d_r}^{c_r-\xi_r+1} f(x)\,dx\right] + \int_{c_h+\eta_h}^{b} f(x)\,dx$$

bei

$$\lim\,(\xi_1+\eta_1+\xi_2+\eta_2+\cdots+\xi_h+\eta_h)=0$$

betrachten. U. s. f.

Die vorstehenden Umformungen des Grenzwerthes J gelten noch allgemein, d. i. auch dann, wenn $|f(x)|$ im Intervalle (a, b) nicht integrirbar ist.

5. Fortsetzung. Auch im Falle, dass das Punktsystem $\mathfrak{M}$ von erster Gattung ist, lässt sich das uneigentliche Integral ohne Rücksicht auf das Verhalten des absoluten Betrages der Function unter dem $\int$ erklären.[1]) De la Vallée-Poussin[2]) bezeichnet solche uneigentliche Integrale im Falle, dass $|f(x)|$ kein Integral von $x=a$ bis $x=b$ zulässt, passend als relativ convergent.

Ist die Menge $\mathfrak{M}$ von erster Ordnung, so besitzt sie nur eine endliche Anzahl von Grenzpunkten. Lassen wir zunächst einen der Endpunkte des Intervalles (a, b), z. B. $x=a$, den einzigen Grenzpunkt der Menge $\mathfrak{M}$ sein, so befindet sich in jedem Intervalle $(a+\xi, b)$ $(\xi>0)$ nur eine endliche Anzahl von Punkten derselben. Existirt nun das Integral $\int_{a+\xi}^b f(x)\,dx$ im Sinne von X. 7 und hat es bei $\lim \xi = +0$ einen endlichen Grenzwerth J, so bezeichnet man ihn als das relativ convergente Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. — Befindet sich der einzige Grenzpunkt $x=c$ der Menge $\mathfrak{M}$ zwischen den Punkten $x=a$ und $x=b$, so setzt man

1) Vgl. Dini-Lüroth, Grundlagen § 217.

2) a. a. O. Nr. 56.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi=+0}\int_a^{c-\xi} f(x)\,dx + \lim_{\eta=+0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx, \quad \text{(p)}$$

natürlich unter der Voraussetzung, dass jeder von diesen beiden Grenzwerthen vorhanden ist. — Besitzt die Menge $\mathfrak{M}$ genau h Grenzpunkte, welche zwischen den Punkten $x=a$ und $x=b$ liegen, so wird das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ neuerdings durch die Formel (n) erklärt. U. s. f.

Ist die Menge $\mathfrak{M}$ von zweiter Ordnung, so besteht ihre zweite Ableitung aus einer endlichen Anzahl von Punkten. Schrumpft diese z. B. auf den einzigen Punkt $x=a$ zusammen, so entfallen von den Punkten der Menge $\mathfrak{M}$ auf jedes Intervall $(a+\xi, b)$ nur eine unendliche Menge erster Ordnung. Hat nun das Integral $\int_{a+\xi}^b f(x)\,dx$ gemäss der vorstehenden Erklärung einen Sinn und besitzt es bei $\lim \xi = +0$ einen endlichen Grenzwerth, so hat er als das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zu gelten. — In den Fällen, dass die zweite Ableitung der Menge $\mathfrak{M}$ aus dem Punkte $x=c$ zwischen $x=a$ und $x=b$ oder aus den Punkten $x=c_1$, $x=c_2 \ldots x=c_h$ zwischen $x=a$ und $x=b$ besteht, treten wieder die in den Formeln (p) und (n) ausgesprochenen Erklärungen für das relativ convergente Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ in Kraft.

In dieser Weise kann man fortschreiten, um die Erklärung des soeben genannten Integrals im Falle, dass die Menge $\mathfrak{M}$ von beliebiger Ordnung ist, zu erlangen.

Endlich gilt der Satz: „Das nach der Erklärung in Nr. 2 als absolut convergent zu bezeichnende Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ lässt sich im Falle, dass die Menge $\mathfrak{M}$ von erster Gattung ist, auf den soeben angegebenen Grenzwerth zurückführen und umgekehrt lässt sich dieser, wenn er absolut convergirt (d. h. wenn der entsprechende Grenzwerth auch für die Function $|f(x)|$ vorhanden und endlich ist), als ein uneigentliches Integral im Sinne von Nr. 2 betrachten."

a) Kraft des Satzes I in Nr. 3 können wir das Harnacksche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ in eine Summe von solchen Integralen zerlegen, dass in dem Intervalle eines jeden nur ein Grenzpunkt höchster Ordnung der Menge $\mathfrak{M}$ und zwar an einer der beiden Grenzen des bezüglichen Integrals vorkommt. Es wird daher genügen, anzunehmen, dass im Intervalle (a, b) etwa der Punkt $x = a$ der einzige Grenzpunkt der höchsten für die Menge $\mathfrak{M}$ überhaupt möglichen Ordnung sei. Zunächst sei $\mathfrak{M}$ von der ersten Ordnung, so dass, wenn $a + \xi$ irgend einen Werth zwischen a und b bedeutet, nur im Intervalle $(a, a + \xi)$ die Punkte von $\mathfrak{M}$ in unendlicher Anzahl sich befinden. Wir setzen nach dem Satze I

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+\xi} f(x)\,dx + \int_{a+\xi}^b f(x)\,dx. \qquad \text{(q)}$$

Nach Nr. 4 ist das zweite Glied rechts zugleich das uneigentliche Integral der Function $f(x)$ über das Intervall $(a + \xi, b)$ im Sinne von X. 7. Da nun nach dem Satze II

$$\lim_{\xi = +0} \int_a^{a+\xi} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{(r)}$$

ist, so finden wir aus (q) beim Grenzübergange $\lim \xi = +0$

$$J = \lim_{\xi = +0} \int_{a+\xi}^b f(x)\,dx. \qquad \text{(s)}$$

Also ist J auch das uneigentliche Integral nach der älteren Erklärung auf S. 287.

Wenn $\mathfrak{M}$ eine unendliche Punktmenge von zweiter Ordnung mit dem einzigen Grenzpunkte $x = a$ bedeutet, so stellen wir zuerst wieder die Gleichung (q) auf. In derselben wird dem soeben Bemerkten zufolge der zweite Theil rechts mit dem uneigentlichen Integrale $\int_{a+\xi}^b f(x)\,dx$ nach der Erklärung auf S. 288 übereinstimmen. Es besteht ferner auch jetzt die Formel (r) und daher auch (s), d. h. es ist J auch in diesem Falle das, was man unter dem Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ früher verstanden hat. U. s. f.

b) Um einzusehen, dass jedes absolut convergente Integral der älteren Erklärungen auch ein solches sei im Sinne von Nr. 2, brauchen wir nur nachzuweisen, dass die bezügliche Function $f(x)$ ein absolut convergentes Integral im letzteren Sinne über das Intervall (a, b) zulässt. Und dazu reicht aus, zu zeigen, dass auch die Function $|f(x)|$ ein solches Integral liefert. Wir haben uns also nach Nr. 1 nur davon zu überzeugen, dass die Summen (2) auf S. 273, d. i.

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\, dx, \tag{t}$$

bei jeder Wahl der Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ sämmtlich unter einer endlichen Zahl liegen. — Ist zunächst $x = a$ der einzige Grenzpunkt 1. Ordnung der Menge $\mathfrak{M}$, so soll zufolge Voraussetzung die Formel

$$\lim_{\xi=+0} \int_{a+\xi}^{b} |f(x)|\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx = K \tag{u}$$

bestehen. Dabei ist, wenn nur $0 < \xi < b - a$ ist,

$$\int_{a+\xi}^{b} |f(x)|\, dx < K. \tag{v}$$

Da wir nun $\delta_1 = \xi$ setzen können und die Summe (t) in diesem Falle keinesfalls grösser ist als das Integral

$$\int_{a+\xi}^{b} |f(x)|\, dx,$$

so erhellt, dass jede Summe (t) kleiner als K ist, w. z. b. w. — Ist $x = a$ der einzige Grenzpunkt 2. Ordnung der Menge $\mathfrak{M}$, so gelten wieder die Beziehungen (u) und (v), woraus, wie gerade vorhin, die Beziehung

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\, dx < K$$

folgt. U. s f.

Berichtigungen zum I. Theile.

S. 5, Z. 12 in der Formel l. $x = a$ st. $x = \alpha$.
„ 103, Z. 1 st. $l = 1 + x$ l. $b = x$.
„ 105, Z. 4 st. $b = 1 + x$ l. $b = x$.
„ 143, Z. 9 st. $\Phi(\xi, \eta)$ l. $\Phi_1(\xi, \eta)$.
„ 184, Z. 2 v. u. st. $G(\xi, \eta_1)$ l. $G_1(\xi, \eta_1)$.
„ 193, Formel (30) st. $\Phi_p(\xi, \lambda)$ l. $\Phi_p(\xi, \eta)$.
„ 203, Z. 3 v. u. st. $f^{(2k)}(x_0 + \xi)$ l. $f^{(2k-1)}(x_0 + \xi)$.
„ 229, Z. 11. Nach „aber" schalte ein: „in".
„ 278, Z. 6 st. „ersten" l. „rechten".
„ 308, Z. 21 l. $t = \dfrac{y}{\alpha(x - x_2)} = \dfrac{\varepsilon \alpha y}{ax + b + \sqrt{-\delta}} = \dfrac{ax + b - \sqrt{-\delta}}{\alpha y}$.
„ 325, Z. 9 st. $X_1'(x)$ l. $N_1'(x)$.
„ 326, Z. 13. Die linke Seite der Formel soll sein

$$y D_x \frac{P_1'(x) - P_1(x)}{N_1(x)} y.$$

„ 351, Fussnote füge zu: G. Ascoli, Atti d. Acc. dei Lincei 2. ser. V. II (1875) S. 866.
„ 354, Z. 19. Vor „Theile" schalte ein „gleiche".
„ 357, Z. 1 st. „$n > \mu$" l. „$m > \mu$".
„ 362, Note 1) st. $x^n - 1$ l. $x^{2n} - 1$.
„ 403, Z. 9 v. u st. „Er" l. „Es".
„ 410, Z. 15 st. $\varphi'(x)$ l. $\varphi'(y)$.
„ 417, Formel (17) st. $\int_a^b f(x)\,dx$ l. $\int_a^b f\{\psi(x)\}\,dx$.
„ 444. Der in Z. 5—13 mitgetheilte Satz ist nicht immer richtig, vgl. Osgood, Amer. J. of. Math. XIX. S. 188, Arzelà, Rend. dell' accad. dei Lincei ser. 5. Vol. VI. S. 292.
„ 449. In Formel (12) und in Z. 21 l. $f(x, h)$ st. $f(x, y)$.

Zum II. Theile.

S. 12, Z 23 st. „Linie ab" l. „Linie aa".
„ 21, Z 2 st. „eindeutige" l. „vieldeutige".
„ 23, Z. 21 st. 3) l. 2).
„ 35, Formel (10) st. $e^{m\pi i}$ l $e^{2m\pi i}$.

S. 51, Z. 23 st. „erhalten" l. „enthalten".
„ 68, Z. 15 st. ε l. $\varepsilon : 2$.
„ 78, Z. 3 v. u. st. $u : 3x^3$ l. $u^2 : 3x^3$.
„ 98, Z. 4 v. u. st. VI. 1 l. VI. 5.
„ 102, Z. 8 st. $\frac{1}{x^2-1}$ l. $\frac{1}{x^2+1}$.
Z. 12 st. des zweiten $l(x+i)$ l. $l(x-i)$.
„ 103, Z. 1, 2, 9 st. dx l. $d\xi$.
„ 114, Z. 20—22. Der Satz von „Zu einem" bis „wofür H verschwindet" ist zu streichen. Es ist nicht schwer, den folgenden Schluss auf den Fall, dass H_1 für $x = x_0$ verschwindet, auszudehnen.
„ 129, Z. 25 sind die Worte „falls a_r singulär, höchstens von zweiter Ordnung" zu streichen. Es muss $F(x, y)$ vielmehr an jeder der singulären Stellen $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ endlich bleiben.
„ 135, Z. 8 st. $F(x, y)$ l. $F_1(x, y)$.
„ 136, Z. 7 schalte nach „welche" ein „an".
„ 149, Z. 10 st. 125 l. 120.
„ 157, Z. 10 st. $\varepsilon < 0$ l. $\varepsilon > 0$.
„ 170, Z. 19 st. $\alpha + \delta_1 = \alpha_2$ l. $\alpha + \delta_1 = \alpha_1$.
„ 173, Z. 4 st. „hinteren" l. „vorderen".
Z. 5 st. „vorderen" l. „hinteren".
Z. 6 v. u. st. a l. α.
„ 182, Z. 4 v. u. ist „längs desselben" zu streichen.
„ 183, Z. 22 st. $\int_a^\gamma$ l. $\int_a^c$ und
Z. 23 st. $\int_\gamma^\beta$ l. $\int_c^b$.
„ 187, Z. 20 fehlt bei $F(a)$ der Factor $(s+1)$.
„ 189, Z. 2 st. $f(a)$ l. $f(x)$.
„ 192, Z. 8 v. u. st. dx l. dy.
„ 193, Formel (5) fehlt in den Integralen der Factor dx.
„ 195, Z. 9 schalte hinter „Differentialquotient" ein: „der daselbst ebenfalls stetig sein soll".
„ 211, Z. 3 v. u. st. $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ l. $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1$.
„ 214, Z. 4 st. $R'(x)$ l. $R(x')$.
„ 221, Z. 25. Die Behauptung: „Dies ist immer möglich" ist unhaltbar; diese Möglichkeit ist vielmehr vorauszusetzen. Sie trifft z. B. nicht zu, wenn an einem Rande von $\mathfrak{F}$ eine Spitze vorkommt, deren Aeste auf derselben Seite ihrer gemeinsamen Tangente liegen.
„ 227, Z. 3 st. $\mathfrak{b}$ l. b.
„ 228, Formel (4) st. c_{2l-n+p} l. $\frac{c_{2l-n+p}}{2l-1}$.
„ 229, Formel (7). Das zweite Glied rechts verschwindet und ist daher zu streichen.

S. 239, Z. 11 st. $\int_{-1-\delta}^{0}$ l. $\int_{-1+\delta}^{0}$.

Z. 15 st. „$\lim \delta = +\infty$“ l. „$\lim \delta = 0$“.

„ 243, Z. 16 st. $2bx^2$ l. $2bx$.

„ 255, Z. 4 st. „vorigen Nr. 4“ l. „Nr. 9“.

„ 259, Z. 7 st. $|x|$ l. $|x-a|$.

Z. 6 v. u. st. $x - x'$ l. $x' - x$.

„ 263, Z. 21 st. „derselben“ l. „desselben“.

„ 269, Z. 25 „$> \varrho$“ ist zu streichen.

Z. 2 v. u. nach „müsste“ ist einzuschalten: „Wir zeigen dies bezüglich der Function $g(x)$. $g(x)$ wäre identisch Null für alle x, wofür $|x-a| < \varrho$ ist.“ Auf S. 270, Z. 2—12 hat dann an Stelle von $f(x)$ $g(x)$ zu treten.

„ 282, Z. 7 st. $\varphi(0, x)$ l. $\varphi(x, 0)$.

„ 299, Fussnote st. „$\lim x = +\infty$“ l. „$\lim n = +\infty$“.

Berichtigungen und Nachträge zum III. Theile.

S. 29, Z. 7 v. u. st. $\int_y^b \psi(x, y)\,dx$ l. $\int_b^y \psi(x, y)\,dy$.

„ 39. In Fig. 4 sind die Buchstaben B und B', sowie B_1 und B_{n-1} mit einander zu vertauschen.

Z. 7 v. u. st. „zu dieser Axe“ l. „zur y-Axe“.

„ 42. In den 1. Satz sind noch die beiden folgenden Voraussetzungen aufzunehmen. 1) Keine von den Parallelen zur x-Axe mit Ausnahme der äussersten $y = b$ und $y = b'$ und keine von den Parallelen zur y-Axe mit Ausnahme der äussersten $x = a$ und $x = a'$ darf mit der Curve $\mathfrak{r}$ ein Stück gemein haben. 2) Ist $\mathfrak{r}$ nicht geschlossen, so dürfen nicht beide Endpunkte in einem und demselben zur y-Axe parallelen Streifen liegen.

Der a. a. O. gegebene Beweis reicht dann vollständig aus für jede geschlossene Linie $\mathfrak{r}$. Ist diese Linie offen und befindet sich in dem Streifen zwischen den Geraden $x = a_{r-1}$ und $x = a_r$ blos einer ihrer Endpunkte, so rechnen wir das ihn enthaltende Stück von $\mathfrak{r}$ zu jenen, deren Anzahl auf S. 44 mit g bezeichnet ist. Dann bleibt die Zahl aller Rechtecke der zweiten Art im genannten Parallelstreifen $2(g+h+i)$. Nunmehr hat eine von den Geraden $x = a_{r-1}$, $x = a_r$, z. B. die erstere, mit diesen g Stücken von $\mathfrak{r}$ nur $g - 1$ Punkte gemein. Mithin ist

$$g - 1 + 2h \leqq q \quad \text{und} \quad g + 2i \leqq q. \tag{1}$$

Da aber die ganzen Zahlen $g-1+2h$ und $g+2i$ unmöglich einander gleich sein können, indem ihre Differenz eine ungerade Zahl ist, so steht in einer von den Beziehungen das Zeichen $<$, so dass

$$2(g+h+i)-1<2q, \quad \text{somit} \quad 2(g+h+i)\leq 2q$$

ist. Demnach ist die Summe aller der in Rede stehenden Rechtecke auch jetzt nicht grösser als $2qE\delta_r$. Es gilt also auch das weiter auf S. 44 Gesagte.

Wenn aber die beiden Endpunkte der Linie $\mathfrak{r}$ zwischen den nämlichen Parallelen zur y-Axe, $x=a_{r-1}$ und $x=a_r$ liegen, so müssen wir auf der rechten Seite der Ungleichung (7) auf S. 44 das Glied $2\Delta E$ hinzufügen. Denn nunmehr finden wir in der soeben angegebenen Weise

$$2(g+h+i)\leq 2q+2.$$

Da wir uns die δ_r von vornherein beliebig klein denken dürfen, so tritt die soeben erwähnte Ausnahme nur dann ein, wenn die beiden Endpunkte der Linie $\mathfrak{r}$ die nämliche Ordinate besitzen. Um auch dann die Formel (7) anwenden zu können, müsste man darin entweder an Stelle von q $q+1$ setzen oder die Coordinatenaxen nebst den darauf bezüglichen Zahlen mit einander vertauschen. Das Letztere reicht auch aus, weil die beiden Endpunkte der Linie $\mathfrak{r}$ jetzt verschiedene Abscissen haben. — Diese Bemerkung wolle man sich auch auf S. 71 und 77 gegenwärtig halten.

S. 43, Z. 4 st. „welche“ l. „welchen“.

„ 46, Formel (8) st. $(A-2H)\,(B+2H)$ l. $(A-2H)\,(B-2H)$.

„ 87, Z. 7. Anstatt auf den 2. Satz auf S. 70 hätten wir uns auf den allgemeineren Satz berufen sollen, wonach die im Gebiete $\mathfrak{F}$ endliche Function, welche über jedes Gebiet, das aus $\mathfrak{F}$ durch Weglassung von Flächenstücken von beliebiger Kleinheit, welche eine endliche Anzahl von gegebenen Punkten und Linien umschliessen, hervorgeht, ein Doppelintegral zulässt, ein solches auch über das Gebiet $\mathfrak{F}$ besitzt. Der Beweis desselben ist dem des ersteren Satzes völlig gleich.

„ 104, Z. 3 fehlt am Schlusse „$d\tau$“.

„ 113, Z. 11 v. u. st. $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}$ l. $\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}$.

„ 154, Z. 2 st. $-\frac{\xi}{a}(l\xi+\alpha a)-\frac{\xi l\xi}{a}$ l. $-\frac{\xi}{a}\,l(\xi+\alpha a)+\frac{\xi l\xi}{a}$.

„ 159, Z. 25 st. $S_{\mathfrak{G}}$ l. $S_{\mathfrak{F}}$.

„ 160, Zusatz zu Note 1). De la Vallée-Poussin, der schon den 7. Satz auf S. 174 unter allgemeineren Voraussetzungen über die Function $f(x, y)$, als es a. a. O. geschieht, bewiesen hat (vgl. Journal de Mathématiques Jahrg. 1892 S. 448), dehnt

ihn im Jahrg. 1899 dieses Journals (S. 191) in ähnlicher Art aus, wie Harnack das eigentliche Doppelintegral auf ein zweimaliges Integral zurückgeführt hatte (vgl. S. 82).

S. 164, Z. 2 st. „Functionen" l. „Function".

„ 214, Z. 2 v. u. st. $\int^{x_2}$ l. $\int_{x_1}^{x_2}$.

„ 232, Z. 10 v. o. st. $\geqq O$ l. $\geqq 0$.

„ 242. Die Formel (8*) beruht auf der folgenden. Setzt man

$$J^2 + K^2 + L^2 = \varrho^2 \quad (\varrho > 0),$$

so hat man

$$\sqrt{\varrho^2 + P} = \varrho\sqrt{1 + P : \varrho^2}.$$

Nun ist jedenfalls

$$\sqrt{1 + P : \varrho^2} \geqq 1 - |P| : \varrho^2,$$

also

$$\sqrt{\varrho^2 + P} \geqq \varrho - |P| : \varrho > \Gamma - \varepsilon : \Gamma.$$

Dabei dürfen wir uns von vornherein $\varepsilon < \Gamma^2$ denken.

Alphabetisches Verzeichniss einiger wissenschaftlicher Benennungen.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten des III. T. — N. = Note.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



